Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Vorbereitungsblatt

1 Theorie stochastischer Prozesse

2 Eigenschaften der Brownschen Bewegung

Sei $W = (W_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Version einer Brownschen Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Sei $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ mit $\mathcal{F}_t := \sigma(W_s : s \leq t)$ ihre kanonische Filtration.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Prozesse $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ Brownsche Bewegungen sind, indem Sie die Definition einer Brownschen Bewegung als Gauß-Prozess oder als Prozess mit unabhängigen Zuwächsen nachrechnen:

(i) $X_t := W_{1-t} - W_1$.

(ii) $X_t := \begin{cases} W_t, & t < t_0, \\ W_{t_0} + Z(W_t - W_{t_0}), & t \geq t_0 \end{cases}$, wobei $t_0 \in (0,1)$ feste Konstante und Z unabhängig von W mit $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = -1) = \frac{1}{2}$.

(iii) $X_t := aW_t + bW'_t$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$ und $W' = (W'_t)_{t\geq 0}$ eine weitere stetige Version einer Brownschen Bewegung, stochastisch unabhängig von W.

(iv) $X_t := \frac{W_{r^{-1}(t)}}{v(r^{-1}(t))}$, wobei $B = (W_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger zentrierter Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion $\gamma(s,t) := \mathbb{E}W_sW_t = u(s)v(t)$ $(s \leq t)$ ist, und $u, v \in C[0,\infty)$. Weiter gelte $v(\cdot) \neq 0$ und $r(t) := u(t)/v(t)$ sei stetig und strikt monoton wachsend mit $r(0) = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ definiert durch $X_t := (1-t)W_{\frac{t}{1-t}}$, $X_1 := 0$ eine Brownsche Brücke ist.
Hinweis: Eine Brownsche Brücke ist ein f.s. stetiger zentrierter Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion $\gamma(s,t) = \min\{s,t\} - st$.

(c) Zeigen Sie elementar, dass die folgenden Prozesse $X = (X_t)_{t\geq 0}$ Martingales bzgl. $\mathcal{F}$ sind:

(i) $X_t := W_t^2 - t$

(ii) $X_t := tW_t - \int_0^t W_s \, \mathrm{d}s$

(iii) $X_t := e^{\lambda W_t - \frac{t\lambda^2}{2}}$
Hinweis: $\mathbb{E}e^Y = e^{\sigma^2/2}$ for $Y \sim N(0,\sigma^2)$.

(d) Für $T > 0$ sei $M_T := \max_{0\leq s\leq T} W_s$ und $m_T := \min_{0\leq s\leq T} W_s$.

(i) Zeigen Sie, dass $\Phi : C[0,1] \to \mathbb{R}, \Phi(f) := \max_{0\le s\le T} f(s)$ $\mathcal{B}(C[0,1])$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar ist.
Hinweise: Nutzen Sie, dass $\{(-\infty, x] : x \ \in \mathbb{R}\}$ ein Erzeugendensystem vom $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist oder zeigen Sie, dass Φ stetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $M_T \overset{d}{=} \sqrt{T} M_1$.

(iii) Es gelte nun $\mathbb{E}|M_T| < \infty$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}\big[M_T + m_T\big] = 0$.

(e) Sei $\tau_1 := \inf\{t \ge 0 : W_t < -1\}$ und $\tau_2 := \inf\{t \ge 0 : W_t > 1\}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\Phi : C[0,1] \to [0,1] \cup \{\infty\}, \Phi(f) := \inf\{t \in [0,1] : f(t) < -1\}$ $\mathcal{B}(C[0,1])$-$\mathcal{B}([0,1] \cup \{\infty\})$-messbar ist (mit der Konvention $\inf \emptyset = \infty$).
Hinweise: Nutzen Sie, dass $\{(x,1] : x \in [0,1]\} \cup \{\{\infty\}\}$ eine Erzeugendensystem von $\mathcal{B}([0,1] \cup \{\infty\})$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\tau_1 \overset{d}{=} \tau_2$.

(f) Sei $C > 0$, $\alpha > \frac{1}{2}$. Eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ heißt Hölder-stetig bzgl. (α, C) falls

$$\forall s,t \in [0,1] : \quad |f(s) - f(t)| \le C|s-t|^\alpha.$$

(i) Zeigen Sie, dass $M := \{\omega \in \Omega : W(\omega) \text{ ist Hölder-stetig bzgl. } (\alpha, C)\} \in \mathcal{A}$, das heißt, messbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(\forall k \in \{1,...,n\} : |W(\frac{k}{n}) - W(\frac{k-1}{n})| \le Cn^{-\alpha}) \to 0$.

(iii) Schließen Sie aus (i),(ii), dass $\mathbb{P}$-f.s. W nicht Hölder-stetig bzgl. (α, C) ist.

(g) Definiere $f(t) : [0,1] \to \mathbb{R}, f(t) = t$ und $g : [0,1] \to \mathbb{R}, g(t) = 2t$.

(i) Zeigen Sie, dass $M := \{f \le B \le g\} = \{\omega \in \Omega : \forall t \in [0,1] : f(t) \le W_t(\omega) \le g(t)\} \in \mathcal{A}$, das heißt, messbar ist.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(\forall k \in \{1,...,n\} : \frac{k}{n^2} \le W_{\frac{k}{n^2}} \le 2\frac{k}{n^2}) \to 0$ $(n \to \infty)$.

(iii) Schließen Sie aus (i),(ii) dass $\mathbb{P}$-f.s., W nicht zwischen f und g liegt.

3 Schwache Konvergenz in $C[0,1]$

(a) Sei $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Gaußschen Prozessen mit Werten in $C[0,1]$. Es gelte $\mathbb{E}X_t^{(n)} := \mu_n(t) = \frac{\sin(t)}{n}$ und $\mathrm{Cov}(X_t^{(n)}, X_t^{(s)}) = \frac{1}{2}\big(s + t - \sqrt{(s-t)^2 + \frac{1}{n}}\big)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s,t \in [0,1]$.
Zeigen Sie, dass $X^{(n)} \overset{D}{\to} W$ in $C[0,1]$ mit einer Brownschen Bewegung W.
Hinweis: Falls $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, dann gilt $\mathbb{E}[Y^4] = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4$.

(b) Sei $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine i.i.d. Folge von $N(0,\sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen ($\sigma^2 > 0$). Sei $\delta \in (0,1)$ fest. Für $a \in [-1+\delta, 1-\delta] =: A$, definiere $X_n(a) := \sum_{k=0}^n a^k \varepsilon_{n-k}$.

(i) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ unabhängig von n gibt, so dass für alle $a, a' \in A$ gilt: $\mathbb{E}[|X_n(a) - X_n(a')|^2] \le C|a-a'|^2$.

(ii) Sei $Z = (Z_a)_{a\in A}$ ein stetiger Gaußprozess mit Kovarianzfunktion $\gamma(a,a') = \mathbb{E}[Z_a Z_{a'}] = \frac{\sigma^2}{1-a\cdot a'}$. Zeigen Sie, dass in $(C(A), \|\cdot\|_\infty)$ gilt: $X_n \overset{D}{\to} Z$.
Hinweis: Da A kompakt, gelte in $C(A)$ dieselben Konvergenzkonzepte wie in $C[0,1]$.

(iii) Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $T_n \in A$ f.s. und $T_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$, wobei $\tau \in A$ eine Konstante ist. Ermitteln Sie die asymptotische Verteilung von $X_n(T_n)$.
Hinweis: Nutzen Sie das CMT mit $\Phi : C(A) \times A \to \mathbb{R}, \Phi(f, x) := f(x)$.

(c) Sei X_i, $i \in \mathbb{N}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit $E(t) := \mathbb{E}[\sin(X_1 t)]$ und $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Für $t \in [0, 1]$ definiere $\hat{E}_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sin(X_i t)$ als Schätzer von $E(t)$ und

$$\hat{P}_n(t) := \sqrt{n}\big(\hat{E}_n(t) - E(t)\big).$$

(i) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ unabhängig von n gibt, so dass

$$\mathbb{E}\big[|\hat{P}_n(t) - \hat{P}_n(s)|^2\big] \le C \cdot |s - t|^2.$$

(ii) Sei Z ein stetiger Gaußprozess mit Kovarianzfunktion $\gamma(s, t) := \mathbb{E}[Z_s Z_t]$ (die im Folgenden noch bestimmt werden muss). Zeigen Sie, dass in $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ gilt: $\hat{P}_n \xrightarrow{D} Z$.

(iii) Es sei $X_1 \sim U[0, 1]$. Zeigen Sie, dass $\sup_{t\in[0,1]} \hat{E}_n(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} 1 - \cos(1)$.
Hinweis: $(1 - \cos(t))/t$ ist nicht-fallend in $[0, 2]$.

(d) Sei X_i, $i \in \mathbb{N}$ eine i.i.d. Folge von reellwertigen Zufallsvariablen mit $X_i \ge 1$ f.s. und $\mathbb{E}[|X_1|^5] < \infty$. Für $t \ge 0$ definiere $E(t) := \mathbb{E}[X_1^{1+t}]$. Für $t \in [0, 1]$ definiere außerdem $\hat{E}_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^{1+t}$ als Schätzer von $E(t)$ und

$$\hat{P}_n(t) := \sqrt{n}\big(E_n(t) - E(t)\big).$$

(i) Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ unabhängig von n existiert, so dass

$$\mathbb{E}\big[|\hat{P}_n(t) - \hat{P}_n(s)|^2\big] \le C \cdot |s - t|^2.$$

Hinweis: Nutzen Sie eine Taylor-Entwicklung der Ordnung 1.

(ii) Sei Z ein stetiger Gaußprozess mit Kovarianzfunktion $\gamma(s, t) := \mathbb{E}[Z_s Z_t] = E(t+s+1) - E(s)E(t)$. Zeigen Sie, dass in $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ gilt: $\hat{P}_n \xrightarrow{D} Z$.

(e) Sei $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ eine i.i.d. Folge mit $\mathbb{E}\varepsilon_0 = 0$ und $\mathrm{Var}(\varepsilon_0) = 1 > 0$ und $\mathbb{E}[\varepsilon_0^4] < \infty$. Sei $S_k := \sum_{i=1}^k \varepsilon_i$ $(k = 1, ..., n)$, $S_0 := 0$. Sei $W = (W_t)_{t\ge 0}$ eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass:

(i) $\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^{n-1} |S_k| \xrightarrow{D} \int_0^1 |W_t|\, \mathrm{d}t$.

(ii) $\frac{1}{\sqrt{n}} \min_{k=0,...,n} S_k \xrightarrow{D} \min_{t\in[0,1]} W_t$.

(f) Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d. Folgen von reellwertigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_1 = \mu \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Var}(X_1) = 1$ und $\mathbb{E}[X_1^4] < \infty$. Außerdem sei $Y_i \in [0, 1]$ f.s., und die Verteilungsfunktion von Y_1 sei bezeichnet mit F. Definiere die empirische Verteilungsfunktion $\hat{F}_n(y) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{Y_i \le y\}}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\Phi : (C[0, 1] \times [0, 1], \|\cdot\|_\infty \times |\cdot|) \to \mathbb{R}$, $\Phi(f, x) := f(x)$ eine stetige Abbildung ist.

(ii) Zeigen Sie, dass für $y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor n\hat{F}_n(y) \rfloor} (X_i - \mu) \xrightarrow{D} N(0, F(y)).$$

Hinweis: Sie können ohne Beweis nutzen, dass $\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k=1,\ldots,n} |X_i| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

(iii) Zeigen Sie, dass für $y \in [0,1]$ gilt: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\lfloor n\hat{F}_n(y) \rfloor} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu F(y)$.

4 Schwache Konvergenz in $\ell^\infty[a,b]$ / Bracketing

In diesem Abschnitt seien $X_i : \Omega \to \mathcal{X}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen sowie $P = \mathbb{P}^{X_1}$.

(a) Sei $\mathcal{F} \subset \{f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \text{ messbar}\}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1, sowie $\mathcal{G} = \{g \circ f : f \in \mathcal{F}\}$. Zeigen Sie, dass für $r \geq 1$ gilt: $N_r(\varepsilon, \mathcal{F}, P) \leq N_r(\varepsilon, \mathcal{F}, P)$.

(b) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ fest gewählt und $\mathcal{F} = \{a \cdot \mathbb{1}_{\{x_0\}} : a \in [-K, K]\}$. Zeigen Sie, dass $N_r(\varepsilon, \ \mathcal{F}, P) \leq C\varepsilon^{-1}$ und geben Sie eine geeignete Konstante C an.

(c) Sei $r \geq 1$ und die Klasse $\mathcal{F}$ so gewählt, dass alle Funktionen beschränkt durch eine Konstante $C > 0$ seien. Geben Sie eine obere Schranke für $N_r(\varepsilon, \mathcal{F}, P)$ in Termen von $N_1(c_1(\varepsilon), \mathcal{F}, P)$ und eine obere Schranke von $N_1(\varepsilon, \mathcal{F}, P)$ in Termen von $N_r(c_2(\varepsilon), \mathcal{F}, P)$ (mit Funktionen c_1, c_2).
Hinweis: Da alle Funktionen aus $\mathcal{F}$ beschränkt durch C sind, kann dies auch für die Brackets angenommen werden.

(d) Es sei $\mathcal{F} = \{f : [0,1] \to [0,1] : \text{ Lipschitz-stetig mit Konstante } 1\}$.

(a) *Etwas schwieriger:* Zeigen Sie, dass $\log N_1(\varepsilon, \mathcal{F}, P) \leq \frac{A}{\varepsilon}$ mit einem $A > 0$.
Hinweis: Definieren Sie zunächst $a_k = k\varepsilon$, $k = 1, ..., N-1$, wobei $N \leq \lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor + 1$, $a_0 = 0$, $a_N = 1$. Definiere dann $B_1 = [a_0, a_1]$, $B_i = (a_{i-1}, a_i]$ ($i = 2, ..., N$). Für $f \in \mathcal{F}$ setze $\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^N \varepsilon \lfloor \frac{f(a_i)}{\varepsilon} \rfloor \cdot \mathbb{1}_{B_i}(x)$. Ermitteln Sie eine obere Schranke für $|f - \tilde{f}|$ und überlegen Sie, wie viele verschiedene Werte $\tilde{f}$ nur annehmen kann. Überlegen Sie dann, wie viele verschiedene Funktionen $\tilde{f}$ aufgrund der Lipschitz-Bedingung an f überhaupt entstehen können. Wählen Sie dazu zuerst $\tilde{f}(a_0)$, dann darauf basierend $\tilde{f}(a_1)$, usw.

(b) Zeigen Sie, dass $J(1, \mathcal{F}, P) < \infty$ und folgern Sie:

$$(\mathbb{G}_n(f))_{f \in \mathcal{F}} \xrightarrow{D} (\mathbb{G}(f))_{f \in \mathcal{F}} \quad \text{in} \quad \ell^\infty(\mathcal{F})$$

mit einem Gaußschen Prozess $\mathbb{G}$.

(c) Es seien nun $X_i \sim U[0,1]$ und $\hat{H}_n(a) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin(\frac{X_i}{a})$ und $H(a) = \mathbb{E} \sin(\frac{X}{a})$. Zeigen Sie, dass

$$\Big(\sqrt{n}\big(\hat{H}_n(a) - H(a)\big)\Big)_{a \geq 1} \xrightarrow{D} \mathbb{G} \quad \text{in} \quad \ell^\infty([1, \infty))$$

und ermitteln Sie die Verteilung von $\mathbb{G}$.

(d) Zeigen Sie, dass $\hat{H}_n(\overline{X_n})$ stochastisch konvergiert und ermitteln Sie den Grenzwert.

(e) Es seien $X_1, ..., X_n \sim U[0,1]$ i.i.d. gleichverteilt. Zeigen Sie, dass

- $\sqrt{n}\big(\sin(\hat{F}_n) - \sin(F)\big)$,
- $\sqrt{n}\Big(\int_0^1 \hat{F}_n^2(x)dx - \int_0^1 F(x)^2 dx\Big)$,
- $\sin\big(\sqrt{n}(\hat{F}_n - F)\big)$,
- $\sqrt{n}\big|\hat{F}_n(x) - F(x)\big|dx$

schwach in $\ell^\infty([0,1])$ konvergieren und bestimmen Sie die Grenzwerte.

(f) Zeigen Sie die Kettenregel für Hadamard-Differenzierbarkeit: Seien $\mathbb{D}, \mathbb{E}, \mathbb{F}$ normierte Vektorräume, $\Phi : \mathbb{D}_\Phi \to \mathbb{E}_\Psi$ und $\Psi : \mathbb{E}_\Psi \to \mathbb{F}$ seien zwei Abbildungen, wobei $\mathbb{D}_\Phi \subset \mathbb{D}, \mathbb{E}_\Psi \subset \mathbb{E}$. Ferner sei Φ Hadamard-differenzierbar in $\theta \in \mathbb{D}_\Phi$ tangential zu $\mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}$ und es sei Ψ Hadamard-differenzierbar in $\Phi(\theta) \in \mathbb{E}_\Psi$ tangential zu $\Phi'_\theta(\mathbb{D}_0)$. Dann ist auch $\Psi \circ \Phi : \mathbb{D}_\Phi \to \mathbb{F}$ Hadamard-differenzierbar in θ tangential zu $\mathbb{D}_0$ mit Ableitung $(\Psi \circ \Phi)'_\theta = \Psi'_{\Phi(\theta)} \circ \Phi'_\theta$.

5 Ito-Integration, Teil 1

Sei $W = (W_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $\mathcal{F}_t := \sigma(W_s : s \leq t)$ ihre kanonische Filtration, die hier stets die üblichen Annahmen erfülle.
Hinweis: Für $Z \sim N(0,1)$, $\sigma > 0$ gilt $\mathbb{E}[e^{\sigma Z}] = e^{\sigma^2/2}$ und $\mathbb{E}[Z^4] = 3$.

(a) Für $t \geq 0$ seien $X_t := \int_0^t s^2 W_s \,\mathrm{d}W_s$ und $Y_t := e^{\lambda t} \cdot \int_0^t W_s^2 \,\mathrm{d}W_s$ mit einem $\lambda > 0$. Berechnen Sie $\mathbb{E}X_t, \mathbb{E}[X_t^2], \mathbb{E}[Y_t], \mathbb{E}[Y_t^2]$ und $\mathbb{E}[X_t Y_t]$.

(b) Für $t \geq 0$ sei $X_t := 1 + \int_0^t e^{\lambda W_s} \,\mathrm{d}W_s$ für $\lambda > 0$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X_t]$ und $\mathbb{E}[X_t^2]$.

(c) Zeigen Sie, dass die folgenden Prozesse Martingale bzgl. $\mathcal{F}$ sind, indem Sie diese als Ito-Integrale schreiben:

(i) $X_t = 5 + W_t^4 - 6tW_t^2 + 3t^2$,

(ii) $X_t = e^{\lambda^2 t/2} \sin(\lambda W_t)$

(iii) $X_t := e^{-\lambda^2 t/2} \cosh(\lambda W_t)$ (it holds that $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$)

(iv) $X_t = t^2 W_t^3 - \int_0^t sW_s(2W_s^2 + 3s) \,\mathrm{d}s$.

Bemerkung / Hinweis: Nehmen Sie hierfür an, dass $W \in \mathcal{M}_2$.

(d) Kombination von Ito-Formel und Ito-Isometrie:

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}\big[e^{W_t} \int_0^t e^{-W_s} \,\mathrm{d}W_s\big] = 2(e^{t/2} - 1)$.

(ii) Berechnen Sie $\mathbb{E}[W_t \cdot \int_0^t W_s^2 \,\mathrm{d}W_s]$.

(e) Es sei $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Beweisen Sie für $t \in [0,T]$ die Formel für partielle Integration, $\int_0^t f(s) \,\mathrm{d}W_s = f(t)W_t - \int_0^t W_s f'(s) \,\mathrm{d}s$ f.s.

6 Ito-Integration, Teil 2

(a) Für eine Brownsche Bewegung W ist bekannt, dass für $t \geq 0$ gilt:

$$M_t := \sup_{s \in [0,t]} W_s \stackrel{d}{=} |W_t|.$$

Sei $a \in \mathbb{R}$ und definiere $\tilde{W}_t := W_t + a \cdot t$. Definiere $\tilde{M}_t := \sup_{s \in [0,t]} |\tilde{W}_s|$. Es ist bekannt, dass $M_t \stackrel{d}{=} W_t$. Ermitteln Sie unter expliziter Nutzung des Satzes von Girsanov, zum Beispiel durch Berechnung der Verteilungsfunktion:

(a) Die Verteilung von $\tilde{W}_t$ für festes $t \geq 0$.

(b) Die Verteilung von $\tilde{M}_t$ für festes $t \geq 0$.

(b) Sei W Brownsche Bewegung. Seien $\theta, \alpha, x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $(X_t)_{t \geq 0}$ definiert durch

$$X_t = \frac{\theta}{\alpha} + e^{-\alpha t}\big(x_0 - \frac{\theta}{\alpha}\big) + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s$$

eine Lösung von $dX_t = (\theta - \alpha X_t)dt + \sigma dW_t$, $X_0 = x_0$ ist. Berechnen Sie $\mathbb{E}X_t$ und $\mathrm{Var}(X_t)$.

(c) Sei W eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass $X_t = \int_0^t \exp(W_t - W_s - \frac{1}{2}(t-s))ds$ die SDGL $X_t = dt + X_t dW_t$ löst.

(d) Gegeben sei die SDGL

$$dY_t = -\frac{1}{1+t} Y_t dt + \frac{1}{1+t} dW_t.$$

Lösen Sie die SDGL, indem Sie $U_t := (1+t)Y_t$ definieren und eine entsprechende SDGL für U herleiten.

(e) Sei W eine Brownsche Bewegung. Betrachten Sie die SDGL

$$dX_t = \frac{1}{2} X_t dt + \sqrt{1 + X_t^2} dW_t, \qquad X_0 = x_0 \in \mathbb{R}.$$

Finden Sie eine Lösung der Form $X_t = f(W_t)$.

(f) Sei W eine Brownsche Bewegung. Wir betrachten für eine stetig differenzierbare Funktion $\sigma : \mathbb{R} \to (0, \infty)$,

$$dX_t = \frac{1}{2} \sigma(X_t) \sigma'(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t, \quad X_0 = x_0.$$

Definiere nun $F(t) := \int_0^t \sigma(s)^{-1} ds$ und $Y_t = F(X_t)$.

- Zeigen Sie, dass f.s. gilt: $F(X_t) - F(X_0) = W_t$.
- Lösen Sie mit obigem Ansatz die SDGL $dX_t = \frac{1}{2} X_t dt + \sqrt{X_t^2 - 1} dW_t$, $X_0 = x > 1$.

(g) Seien $\mu, \sigma : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass

$$X_t = X_0 \exp\Big(\int_0^t \big(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2\big) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s \Big), \quad t \geq 0$$

eine Lösung der SDGL $dX_t = \mu(t) X_t dt + \sigma(t) X_t dW_t$ ist.

(h) Seien $W_t = (W_{1t}, ..., W_{nt})$ ein Vektor unabhängiger Brownscher Bewegungen. Definiere

$$R_t := \|W_t\|_2 = \Big(\sum_{j=1}^n W_{jt}^2\Big)^{1/2}.$$

- Zeigen Sie, dass $S_t := R_t^2$ erfüllt:

$$dS_t = ndt + 2W_t \cdot W_t.$$

- Zeigen Sie, dass

$$R_t = \frac{n-1}{2R_t}dt + \frac{1}{R_t}W_t \cdot dW_t.$$

Hierbei ist $a \cdot db := \sum_{j=1}^n a_j db_j$ definiert.

7 Stationäre Prozesse und Ergodensatz

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Sei $W = (W_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine i.i.d. Folge von Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\varepsilon_i = 0$ und $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = 1$. Entscheiden Sie mit Begründung, ob die folgenden Prozesse $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ stationär und / oder ergodisch sind.

(i) $X_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$

(ii) $X_n := n \cdot \varepsilon_n$

(iii) $X_n := \varepsilon_n^2 + \varepsilon_{n+1}^2$

(iv) $X_n := \varepsilon_0$

(v) $X_n := \varepsilon_{n \bmod 2}$.

(vi) $X_n := \varepsilon_n + \alpha\varepsilon_{n+1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(vii) $X_n := W_n$

(viii) $X_n := W_{n+2} - W_n$

(ix) $X_n := W_{2n} - W_n$

(b) Sei $(U_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine i.i.d. Folge von reellwertigen Zufallsvariablen mit $U_i \sim U[-2a, 2a]$ (Gleichverteilung auf $[-2a, 2a]$), wobei $a > 0$ ein unbekannter Parameter ist. Für $i \in \mathbb{Z}$ definiere

$$X_i := U_i \mathbb{1}_{\{|U_i|\leq a\}} + U_{i-1}\mathbb{1}_{\{|U_i|\ >a\}} = \begin{cases} U_i, & |U_i| \leq a, \\ U_{i-1}, & |U_i| > a \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ stationär und ergodisch ist.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\hat{a}_n := \frac{4}{3n}\sum_{i=1}^n |X_i| \to a \quad f.s.$$

(c) Sei $(U_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine i.i.d. Folge von reellwertigen Zufallsvariablen mit $U_i \sim U[0, 1]$. Sei $a \in (0, 1)$ ein unbekannter Parameter. Für $i \in \mathbb{Z}$ definiere

$$X_i := \mathbb{1}_{\{U_i < a \cdot U_{i-1}\}}$$

(i) Zeigen Sie, dass $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ stationär und ergodisch ist.

(iii) Zeigen Sie, dass

$$\hat{a}_n := \left(\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i X_{i-1}\right)^{1/3} \to a \quad f.s.$$