Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Präsenzblatt 9

Aufgabe P1 (Anwendung des OST).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $W = (W_t)_{t \geq 0}$ eine stetige Version der Brownschen Bewegung. Es sei $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ die kanonische Filtration von W, welche die üblichen Annahmen erfülle. Bekanntermaßen ist W ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Definiere für $a, b > 0$:

$$\tau_{a,b} := \inf\{t \geq 0 : W_t \notin (-a, b)\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Begründen Sie, dass $\tau_{a,b}$ eine $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$-Stoppzeit ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(W_{\tau_{a,b}} = -a) = \frac{b}{a+b} = 1 - \mathbb{P}(W_{\tau_{a,b}} = b).$$

Hinweis: Wenden Sie für $n \in \mathbb{N}$ das OST auf $\tau_{a,b} \wedge n$ an und bilden Sie danach den Limes $n \to \infty$.

Aufgabe P2 (Stetige lokale Martingale mit beschränkter Variation).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(M_t)_{t \geq 0}$ ein stetiges lokales Martingal mit beschränkter Variation. Zeigen Sie: Dann ist M f.s. konstant.

Aufgabe P3 (Beispiel eines lokalen Martingals).

In dieser Aufgabe wird ein Beispiel eines lokalen Martingals gegeben. Anschaulich wird hierbei ein bekanntes, gegen 0 konvergentes Martingal der Brownschen Bewegung in der Zeit so beschleunigt, dass der Limes 0 bereits in endlicher Zeit erreicht wird. Dies zerstört die Martingaleigenschaft. Wählt man allerdings eine Folge von Stoppzeiten so, dass diese den Zeitbereich auf den 'guten Teil' einschränken, wo der Limes noch nicht erreicht wurde, entsteht ein lokales Martingal.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $W = (W_t)_{t \geq 0}$ eine stetige Version der Brownschen Bewegung. Es sei $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ die kanonische Filtration der Brownschen Bewegung, welche die üblichen Annahmen erfülle. Aus früheren Aufgaben ist bekannt, dass $X = (X_t)_{t \geq 0}$ gegeben durch

$$X_t := e^{W_t - \frac{t}{2}}$$

ein (stetiges) Martingal ist. Definiere nun

$$Z = (Z_t)_{t \geq 0}, \qquad Z_t := \begin{cases} X_{\frac{t}{1-t}}, & 0 < t < 1, \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass Z fast sicher stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass Z *kein* Martingal ist.

(c) Definiere die Stoppzeiten $\tau_k := \inf\{t \geq 0 : Z_t = k\}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\tau_k \uparrow \infty$ f.s.

(d) Definiere

$$\mathcal{G}_t := \begin{cases} \mathcal{F}_{\frac{t}{1-t}}, & t < 1, \\ \bigcup_{s \geq 0} \mathcal{F}_s, & t \geq 1. \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass Z ein lokales Martingal bzgl. $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ ist.

Aufgabe P4 (Ein einfaches stochastisches Integral).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $W = (W_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Es sei eine Folge einfacher Funktionen gegeben durch

$$X_t^n = \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i} \cdot \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t).$$

mit $t_i = \frac{i}{2^n}$, $i = 0, ..., 2^n$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt

$$\mathbb{E} \int_0^1 (W_t - X_t)^2 dt \to 0.$$

(b) Ermitteln Sie den L^2-Limes von

$$\int_0^1 X_t^n dW_t$$

Später wird dieser Ausdruck als das stochastische Integral $\int_0^1 W_t dW_t$ *definiert.*

Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`