Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Präsenzblatt 8 - Lösung

Aufgabe P1 (Hadamard-Differenzierbarkeit).
Betrachten Sie die Abbildung

$$\Phi : l^\infty(\mathbb{R}) \to l^\infty(\mathbb{R}), \quad F \mapsto \Phi(F) = \frac{1}{F^2+1},$$

wobei $l^\infty(\mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen wird.

(a) Zeigen Sie, dass Φ Hadamard-differenzierbar in jedem $F \in l^\infty(\mathbb{R})$ ist und bestimmen Sie die Ableitung.

(b) Seien $X_i : \Omega \to \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F und empirischer Verteilungsfunktion $\hat{F}_n$. Ermitteln Sie die Grenzverteilung des Prozesses

$$\sqrt{n}\Big(\frac{1}{1+\hat{F}_n(x)^2} - \frac{1}{1+F(x)^2}\Big)$$

in $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

Lösung:

(a) Im Kontext der Aufgabe ist $\mathbb{D}_\Phi = \ell^\infty(\mathbb{R}) = \mathbb{D}$, und $\mathbb{E} = \ell^\infty(\mathbb{R})$. Sei $\theta \in \mathbb{D}_\Phi = \ell^\infty(\mathbb{R})$ und $h_t \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ mit $h_t \to h$ $(t \downarrow 0)$, d.h. $\|h_t - h\|_\infty \to 0$ $(t \downarrow 0)$.
Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(\theta+th_t)-\Phi(\theta)}{t} &= \frac{\frac{1}{1+(\theta+th_t)^2} - \frac{1}{1+\theta^2}}{t} = \frac{(1+\theta^2)-(1+(\theta+th_t)^2)}{t(1+(\theta+th_t)^2)\cdot(1+\theta^2)} \\ &= \frac{-2th_t\theta + t^2h_t^2}{(1+(\theta+th_t)^2)\cdot(1+\theta^2)} \\ &= \frac{-2h_t\theta + th_t^2}{(1+(\theta+th_t)^2)\cdot(1+\theta^2)}\end{aligned}$$

Vermuteter Grenzwert: $\Phi'_\theta(h) = \frac{-2\theta h}{(1+\theta^2)^2}$.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{\Phi(\theta+th_t)-\Phi(\theta)}{t} - \frac{-2\theta h}{(1+\theta^2)^2}\Big| \\
=\ &\Big|\frac{2\theta h}{(1+\theta^2)^2} - \frac{2h_t\theta + th_t^2}{(1+(\theta+th_t)^2)\cdot(1+\theta^2)}\Big| \\
\le\ &\underbrace{\frac{2}{1+\theta^2}}_{\le 2}\cdot\Big(\Big|\theta\cdot\Big(\frac{h}{1+\theta^2} - \frac{h_t}{(1+(\theta+th_t)^2)}\Big)\Big| + \underbrace{\frac{th_t^2}{1+(\theta+th_t)^2}}_{\le t\|h_t\|_\infty^2}\Big) \\
\le\ &2\Big(\|\theta\|_\infty\cdot\Big(\underbrace{\Big|\frac{h(1+(\theta+th_t)^2)-h_t(1+\theta^2)}{(1+\theta^2)(1+(\theta+th_t)^2)}\Big|}_{\le|h(1+(\theta+th_t)^2)-h_t(1+\theta^2)|} + t\|h_t\|_\infty^2\Big) \\
=\ &2\Big(\|\theta\|_\infty\cdot\Big(\|h-h_t\|_\infty\cdot(1+\theta^2) + \|h_t\|_\infty(2t\|h_t\|_\infty\|\theta\|_\infty + t^2\|h_t\|_\infty^2)\Big) + t\|h_t\|_\infty^2\Big) \\
\to\ &2\Big(\|\theta\|_\infty\cdot\Big(0\cdot(1+\theta^2) + \|h\|_\infty(0\cdot\|h\|_\infty\|\theta\|_\infty + 0\cdot\|h\|_\infty^2)\Big) + 0\cdot\|h\|_\infty^2\Big) = 0 \qquad (t\downarrow 0).
\end{aligned}$$

(b) Aus dem Satz von Donsker ist bekannt, dass

$$\sqrt{n}(\hat{F}_n - F) \xrightarrow{D} (\mathbb{B}_{F(x)})_{x\in\mathbb{R}},$$

wobei $(\mathbb{B}_t)_{t\in[0,1]}$ eine Brownsche Brücke ist.
Anwendung der Delta-Methode liefert

$$\sqrt{n}\Big(\frac{1}{1+\hat{F}_n(x)^2} - \frac{1}{1+F(x)^2}\Big) = \sqrt{n}(\Phi(\hat{F}_n)-\Phi(F)) \xrightarrow{D} \Phi'_\theta(\mathbb{B}_F) = \Big(-\frac{2F(x)\mathbb{B}_{F(x)}}{(1+F(x)^2)}\Big)_{x\in\mathbb{R}}$$

Der Grenzwert ist damit wieder ein zentrierter Gauß-Prozess, jedoch nun mit Kovarianzfunktion

$$\gamma(x,y) = \frac{4F(x)F(y)}{(1+F(x)^2)(1+F(y)^2)}\big(\min\{F(x),F(y)\} - F(x)F(y)\big).$$

(Insbesondere kann das Minus im Grenzwert weggelassen werden).

Aufgabe P2 (Martingaleigenschaft von Funktionalen der Brownschen Bewegung).
Sei $W = (W_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Es sei $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ mit $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s\le t)$ die zugehörige kanonische Filtration. Zeigen Sie, dass die folgenden Ausdrücke Martingale bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ sind:

(a) $X_t = W_t^3 - 3tW_t$

(b) $X_t = e^{-\lambda^2 t/2}\cosh(\lambda W_t)$ mit $\lambda > 0$, $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Lösung:

(a) Rechne die drei Martingaleigenschaften nach:

- Es gilt für Normalverteilungen $Z\sim N(0,1)$, dass $\mathbb{E}[Z^4]=3$. Damit folgt

$$\mathbb{E}|X_t| = \mathbb{E}|W_t^3 - 3tW_t| \le \mathbb{E}[|W_t|^3] + 3t\mathbb{E}|W_t| \le \mathbb{E}[W_t^4]^{3/4} + 3t\mathbb{E}[W_t^2]^{1/2} \le (3t^2)^{3/4} + 3t\cdot t^{1/2} < \infty.$$

- Es gilt: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^3 - 3tx$ ist stetig und damit messbar. Es folgt, dass $X_t = W_t^3 - 3tW_t = g(W_t)$ $\mathcal{F}_t$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar ist als Komposition von einer $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren und einer $\mathcal{F}_t - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren Funktion.
- Es gilt

  $$W_t^3 = (W_t - W_s + W_s)^3 = (W_t - W_s)^3 + 3(W_t - W_s)^2 W_s + 3(W_t - W_s)W_s^2 + W_s^3.$$

  und

  $$3tW_t = 3t(W_t - W_s) + 3tW_s$$

  Damit folgt, da $W_t - W_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$,

  $$\begin{aligned} & \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t^3 - 3tW_t|\mathcal{F}_s] \\ = \; & \mathbb{E}[(W_t - W_s)^3] + 3\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2]W_s + 3\mathbb{E}[W_t - W_s]W_s^2 + W_s^3 - 3t\mathbb{E}[W_t - W_s] - 3tW_s \\ = \; & 0 + 3(t-s)W_s + 0 + W_s^3 - 0 - 3tW_s = W_s^3 - 3sW_s = X_s. \end{aligned}$$

(b) Rechne die drei Martingaleigenschaften nach:

- Es gilt für Normalverteilungen $Z \sim N(0,1)$, dass $\mathbb{E}[e^{\sigma Z}] = e^{\sigma^2/2}$. Damit folgt

  $$\mathbb{E}|X_t| = e^{-\lambda^2 t/2}\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[e^{-\lambda W_t} + e^{\lambda W_t}\right] = e^{-\lambda^2 t/2}\frac{1}{2}\left(e^{\lambda^2 t/2} + e^{\lambda^2/2}\right) = e^{-\lambda^2 t/2}e^{\lambda^2 t/2} = 1 < \infty.$$

- Es gilt: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = e^{-\lambda^2 t/2}\cosh(\lambda x)$ ist stetig und damit messbar. Es folgt, dass $X_t = e^{-\lambda^2 t/2}\cosh(\lambda W_t) = g(W_t)$ $\mathcal{F}_t$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar ist als Komposition von einer $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren und einer $\mathcal{F}_t - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren Funktion.
- Es gilt Da $W_t - W_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$, gilt

  $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] &= \frac{1}{2}e^{-\lambda^2 t/2}\mathbb{E}[e^{\lambda W_t} + e^{-\lambda W_t}|\mathcal{F}_s] \\ &= \frac{1}{2}e^{-\lambda^2 t/2}\left(\mathbb{E}[e^{\lambda(W_t - W_s)}]e^{\lambda W_s} + \mathbb{E}[e^{-\lambda(W_t - W_s)}]e^{-\lambda W_s}\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\lambda^2 t/2}\left(e^{\lambda^2(t-s)/2}e^{\lambda W_s} + e^{\lambda^2(t-s)/2}e^{-\lambda W_s}\right) \\ &= e^{\lambda^2 s/2}\frac{1}{2}(e^{\lambda W_s} + e^{-\lambda W_s}) \\ &= e^{\lambda^2 s/2}\cosh(\lambda W_s) = X_s. \end{aligned}$$

Aufgabe P3 (Stoppzeiten in stetiger Zeit).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration.

(a) Zeigen Sie: Sind τ_1, τ_2 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeiten, so ist auch $\tau_1 \vee \tau_2$ eine $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeit.

(b) Sei $W = (W_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Version der Brownschen Bewegung und nun $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ihre kanonische Filtration. Zeigen Sie, dass für $b > 0$

$$\tau_b := \inf\{t \geq 0 : W_t = b\}$$

eine $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeit ist.

Lösung:

(a) Es gilt für $t \geq 0$:

$$\{\tau_1 \vee \tau_2 \leq t\} = \{\tau_1 \leq t, \tau_2 \leq t\} = \underbrace{\{\tau_1 \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_r} \cap \underbrace{\{\tau_2 \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t.$$

Damit ist $\tau_1 \vee \tau_2$ Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

(b) Sei $b > 0$. Dann gilt für $t \geq 0$, da $s \mapsto W_s$ stetig,

$$\{\tau_b > t\} \quad = \quad \{\forall s \in [0,t] : W_s < b\}.$$

Beweis: '$\subset$': Ist $\tau_b > t$, gilt in jedem Fall für alle $s \in [0,t] : W_s \neq b$. Da $W_0 = 0$ und W stetig ist, folgt $W_s < b$ für alle $s \in [0,t]$.
'$\supset$': Ist für alle $s \in [0,t] : W_s < b$ folgt $\tau_b \geq t$. Wäre aber $\tau_b = t$, so gäbe es Folge $t_n \downarrow t$ mit $W_{t_n} \to b$. Wegen der rechtsseitigen Stetigkeit gilt aber auch $W_{t_n} \to W_t$. Damit wäre also $W_t = b$, Widerspruch zu $W_t < b$.

Aufgrund der (rechtseitgen) Stetigkeit folgt weiter

$$\{\tau_b > t\} \quad = \quad \{\forall s \in [0,t] : W_s < b\} = \{\forall s \in [0,t] \cap \mathbb{Q} : W_s < b\} = \bigcap_{s \in [0,t] \cap \mathbb{Q}} \underbrace{\{W_s < b\}}_{\in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t.$$

Damit ist auch $\{\tau_b \leq t\} = \{\tau_b > t\}^c \in \mathcal{F}_t$.

Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`