Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Präsenzblatt 8

Aufgabe P1 (Hadamard-Differenzierbarkeit).
Betrachten Sie die Abbildung

$$\Phi : l^\infty(\mathbb{R}) \to l^\infty(\mathbb{R}), \quad F \mapsto \Phi(F) = \frac{1}{F^2 + 1},$$

wobei $l^\infty(\mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen wird.

(a) Zeigen Sie, dass Φ Hadamard-differenzierbar in jedem $F \in l^\infty(\mathbb{R})$ ist und bestimmen Sie die Ableitung.

(b) Seien $X_i : \Omega \to \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F und empirischer Verteilungsfunktion $\hat{F}_n$. Ermitteln Sie die Grenzverteilung des Prozesses

$$\sqrt{n}\Big(\frac{1}{1 + \hat{F}_n(x)^2} - \frac{1}{1 + F(x)^2}\Big)$$

in $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

Aufgabe P2 (Martingaleigenschaft von Funktionalen der Brownschen Bewegung).
Sei $W = (W_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Es sei $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ mit $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s \le t)$ die zugehörige kanonische Filtration. Zeigen Sie, dass die folgenden Ausdrücke Martingale bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ sind:

(a) $X_t = W_t^3 - 3tW_t$

(b) $X_t = e^{-\lambda^2 t/2} \cosh(\lambda W_t)$ mit $\lambda > 0$, $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Aufgabe P3 (Stoppzeiten in stetiger Zeit).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ eine Filtration.

(a) Zeigen Sie: Sind τ_1, τ_2 $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$-Stoppzeiten, so ist auch $\tau_1 \vee \tau_2$ eine $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$-Stoppzeit.

(b) Sei $W = (W_t)_{t\ge0}$ eine stetige Version der Brownschen Bewegung und nun $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ ihre kanonische Filtration. Zeigen Sie, dass für $b > 0$

$$\tau_b := \inf\{t \ge 0 : W_t = b\}$$

eine $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$-Stoppzeit ist.

Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`