Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Präsenzblatt 6

Aufgabe P1 (Maximalungleichungen für normalverteilte Zufallsvariablen).
In dieser Aufgabe sollen weitere Maximalungleichungen gezeigt werden.

(a) Seien $Z_1, ..., Z_M$ Zufallsvariablen mit

$$\max_{j=1,...,M} \mathbb{E}[\exp(\alpha Z_j^2)] \leq C$$

für gewisse $\alpha, C > 0$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}\left[\max_{j=1,...,M} Z_j^2\right] \leq \frac{1}{\alpha}\log(MC).$$

(b) Zeigen Sie, dass für eine normalverteilte Zufallsvariable $Z \sim N(0,\sigma^2)$ und $\alpha < \frac{1}{2\sigma^2}$ gilt:

$$\mathbb{E}\exp(\alpha \cdot Z^2) = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\sigma^2}}.$$

(c) Seien $Z_1, ..., Z_M$, $Z_j = (Z_{j1}, ..., Z_{jd})^T$ d-dimensional normalverteilt mit $\mathbb{E}[Z_j] = 0$ und

$$\max_{j=1,...,M}\max_{k=1,...,d} \mathbb{E}[Z_{jk}^2] =: \sigma_{max}^2 < \infty.$$

Dann gilt:

$$\mathbb{E}\left[\max_{j=1,...,M} \|Z_j\|^2\right] \leq 4d \cdot \sigma_{max}^2 \log(\sqrt{2}Md).$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichnet.
Hinweis: Verwenden Sie (a) und (b) mit $\alpha = \frac{1}{4\sigma_{max}^2}$.

Aufgabe P2 (Maximalungleichungen bei nur polynomiellen Momenten).
Sinn dieser Aufgabe ist es, dass Sie sehen, dass auch Maximalungleichungen bewiesen werden können, wenn nur polynomielle Momente vorliegen. In diesem Fall ist allerdings die Qualität der oberen Schranke entsprechend schlechter.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{X}, d)$ ein metrischer Raum und $X_i : \Omega \to \mathcal{X}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen. Sei $\mathcal{F} = \{f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \text{ messbar}\}$ mit der Eigenschaft, dass ein $M > 1$ und ein $\alpha > 2$ existiert, so dass

$$\forall f \in \mathcal{F} : \quad \|f(X_1)\|_\alpha^\alpha := \mathbb{E}[|f(X_1)|^\alpha] \leq M.$$

Sei $\mathcal{F}$ endlich. Zeigen Sie, dass für alle $\beta < \alpha$ gilt:

$$\mathbb{E} \max_{f \in \mathcal{F}} |\mathbb{G}_n(f)| \leq 2(\alpha - 1)^{1/2} M^{1/\alpha} \cdot |\mathcal{F}|^{1/\alpha}$$

Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis, dass für $\alpha > 2$ gilt: $\|\mathbb{G}_n(f)\|_\alpha \leq 2\sqrt{\alpha - 1}\|f(X_1)\|_\alpha$ (sog. Burkholder-Ungleichung für i.i.d. Variablen).

Aufgabe P3 (Anwendungen des Satzes von Glivenko-Cantelli).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_i : \Omega \to \mathcal{X} = \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Es sei

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}$$

die empirische Verteilungsfunktion.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Glivenko-Cantelli (Blatt 6, Aufgabe 3):

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \hat{F}_n(x) - F(x) \right| \to 0 \quad \text{f.s.}$$

(b) Sei nun $p \in (0, 1)$ und F stetig und streng monoton wachsend, $x_p = F^{-1}(p)$ das p-Quantil der Verteilung von X.
Bezeichne $X_{\lfloor np \rfloor :n}$ das empirische p-Quantil der Stichprobe (hierbei sind $X_{1:n} \leq ... \leq X_{n:n}$ die Ordnungsstatistiken von $X_1, ..., X_n$). Zeigen Sie, dass

$$X_{\lfloor np \rfloor :n} \to x_p \quad \text{f.s.}$$

Hinweis: Da F stetig und streng monoton wachsend, ist auch F^{-1} stetig.

Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`