Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Präsenzblatt 5 - Lösungen

Aufgabe P1 (Bracketing-Zahlen der mehrdimensionalen Verteilungsfunktion).
Es sei $(\mathcal{X} = \mathbb{R}^d, \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $r \geq 1$. Sei F die zu P gehörige Verteilungsfunktion, d.h.

$$F(x) = F(x_1, ..., x_d) = \mathbb{P}((-\infty, x_1] \times ... \times (-\infty, x_d]).$$

Sei

$$\mathcal{F} := \{f_t : \mathbb{R}^d \to [0,1] : f_t(x) = \mathbb{1}_{\{x \leq t\}}, t \in \mathbb{R}^d\},$$

wobei $\leq$ hier komponentenweise zu verstehen ist. Zeigen Sie, dass für $\varepsilon \in (0,1)$ gilt:

$$N_2(\varepsilon, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \leq \frac{(2d)^d}{\varepsilon^{2d}}.$$

Lösung: Sei $\varepsilon \in (0,1)$ beliebig. Es bezeichne

$$F_s(x_s) := \int_{\mathbb{R}^{d-1}} F(x_1, ..., x_d) \, \mathrm{d}(x_1, ..., x_{s-1}, x_{s+1}, ..., x_d) \qquad (s = 1, ..., d)$$

die s-te Marginal-Verteilungsfunktion. Wir wählen Zwischenstellen $-\infty = t_0 < ... < t_k = +\infty$ mit

$$\forall s \in \{1, ..., d\}, j \in \{1, ..., k\} : \quad F_s(t_j-) - F_s(t_{j-1}) < \varepsilon.$$

Offensichtlich genügt es, dafür $k = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil \leq \frac{2}{\varepsilon}$ zu wählen.
Wir definieren nun für $j_1, ..., j_d \in \{1, ..., k\}$:

$$l_{j_1,...,j_d}(x) := \mathbb{1}_{\{x \leq (t_{j_1-1}, ..., t_{j_d-1})\}}, \qquad u_{j_1,...,j_d}(x) := \mathbb{1}_{\{x < (t_{j_1}, ..., t_{j_d})\}}.$$

Damit werden

$$k^d \leq \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^d \tag{1}$$

Brackets $[l_{j_1,...,j_d}, u_{j_1,...,j_d}]$ definiert.

Zu einem $f_v \in \mathcal{F}$ $(v \in \mathbb{R}^d)$ suchen wir $j_1, ..., j_d \in \{1, ..., k\}$ mit

$$\forall s \in \{1, ..., d\} : \quad t_{j_{s-1}} \leq v_s \ < t_{j_s},$$

dann ist

$$l_{j_1,...,j_d}(x) = \mathbb{1}_{\{x \leq (t_{j_1-1}, ..., t_{j_d-1})\}} \leq f_v(x) = \mathbb{1}_{\{x \leq (v_1, ..., v_d)\}} \leq u_{j_1,...,j_d}(x) = \mathbb{1}_{\{x < (t_{j_1}, ..., t_{j_d})\}},$$

also $f_v \in [l_{j_1,\dots,j_d}, u_{j_1,\dots,j_d}]$ in einem Bracket enthalten.

Insgesamt gilt für die Grenzen eines Brackets

$$\begin{aligned}
& P(\underbrace{u_{j_1,\dots,j_d} - l_{j_1,\dots,j_d}}_{\leq 1})^2 \\
\leq \quad & P\Big(u_{j_1,\dots,j_d} - l_{j_1,\dots,j_d}\Big) \\
= \quad & P\Big((-\infty, t_{j_1}) \times \dots \times (-\infty, t_{j_d})\Big) - P\Big((-\infty, t_{j_1-1}] \times \dots \times (-\infty, t_{j_d-1}]\Big) \\
\overset{\text{Teleskop}}{=} \quad & \sum_{s=1}^{d} \Bigg[P\Big((-\infty, t_{j_1-1}] \times \dots \times (-\infty, t_{j_{s-1}-1}] \times (-\infty, t_{j_s}) \times (-\infty, t_{j_{s+1}}) \times \dots \times (-\infty, t_{j_d})\Big) \\
& \quad - P\Big((-\infty, t_{j_1-1}] \times \dots \times (-\infty, t_{j_{s-1}-1}] \times (-\infty, t_{j_s-1}] \times (-\infty, t_{j_{s+1}}) \times \dots \times (-\infty, t_{j_d})\Big)\Bigg] \\
= \quad & \sum_{s=1}^{d} P\Big((-\infty, t_{j_1-1}] \times \dots \times (-\infty, t_{j_{s-1}-1}] \times (t_{j_s-1}, t_{j_s}) \times (-\infty, t_{j_{s+1}}) \times \dots \times (-\infty, t_{j_d})\Big) \\
\leq \quad & \sum_{s=1}^{d} P\Big(\mathbb{R}^{s-1} \times (t_{j_s-1}, t_{j_s}) \times \mathbb{R}^{d-s}\Big) \\
= \quad & \sum_{s=1}^{d} \underbrace{F_s(t_{j_s}-) - F_s(t_{j_s-1})}_{<\varepsilon} \\
\leq \quad & d \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\|u_{j_1,\dots,j_d} - l_{j_1,\dots,j_d}\|_2 \leq \sqrt{d \cdot \varepsilon},$$

und damit:

$$\begin{aligned}
N_2(\sqrt{d \cdot \varepsilon}, \mathcal{F}, P) \quad &= \quad \text{Anzahl an Brackets } [l,u] \text{ mit } \|u - l\|_2 \leq \sqrt{d \cdot \varepsilon}, \text{ um } \mathcal{F} \text{ zu überdecken} \\
&\overset{(1)}{\leq} \quad \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^d.
\end{aligned}$$

Es folgt mit der Definition $\tilde{\varepsilon} := \sqrt{d \cdot \varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{d}$:

$$N_2(\tilde{\varepsilon}, \mathcal{F}, P) \leq \left(\frac{2}{\left(\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{d}\right)}\right)^d = \frac{(2d)^d}{\tilde{\varepsilon}^{2d}}.$$

Das war zu zeigen.

Aufgabe P2 (Bracketing-Zahlen bei weiteren Funktionenklassen).
Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \{f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \text{ messbar}\}$ sowie $1 \leq r < \infty$. Weiter seien alle $f \in \mathcal{F}$ und $g \in \mathcal{G}$ durch eine Konstante $C > 0$ beschränkt. Definiere

$$\mathcal{F} + \mathcal{G} = \{f + g : f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$N_r(\varepsilon, \mathcal{F}+\mathcal{G}, P) \leq N_r(\frac{\varepsilon}{2}, \mathcal{F}, P) \cdot N_r(\frac{\varepsilon}{2}, \mathcal{G}, P).$$

Lösung: Sei $N_1 := N_r(\frac{\varepsilon}{2}, \mathcal{F}, P)$, $N_2 := N_r(\frac{\varepsilon}{2}, \mathcal{G}, P)$ und $l_j^{(1)}, u_j^{(1)}$ $(j = 1, ..., N_1)$ bzw. $l_k^{(2)}, u_k^{(2)}$ $(k = 1, ..., N_2)$ die Grenzen der Brackets mit

$$\forall j \in \{1, ..., N_1\}: \quad \|u_j^{(1)} - l_j^{(1)}\|_r \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall k \in \{1, ..., N_2\}: \quad \|u_k^{(2)} - l_k^{(2)}\|_r \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{j=1}^{N_1} [l_j^{(1)}, u_j^{(1)}], \qquad \mathcal{G} \subset \bigcup_{k=1}^{N_2} [l_k^{(2)}, u_k^{(2)}].$$

Wir definieren jeweils $N_1 \cdot N_2$ neue Funktionen für die Ober- und Untergrenzen neuer Brackets $(j = 1, ..., N_1,\ k = 1, ..., N_2)$:

$$l_{j,k} := l_j^{(1)} + l_k^{(2)}, \qquad u_{j,k} := u_j^{(1)} + u_k^{(2)}.$$

Dann gilt: Für beliebiges $(f+g) \in \mathcal{F}+\mathcal{G}$ (d.h. $f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}$) gibt es $j \in \{1, ..., N_1\}$, $k \in \{1, ..., N_2\}$ mit

$$f \in [l_j^{(1)}, u_j^{(1)}], \qquad g \in [l_k^{(2)}, u_k^{(2)}].$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & l_j^{(1)} \leq f \leq u_j^{(1)}, \qquad l_k^{(2)} \leq g \leq u_k^{(2)} \\ \Rightarrow \quad & l_{j,k} = l_j^{(1)} + l_k^{(2)} \leq (f+g) \leq u_j^{(1)} + u_k^{(2)} = u_{j,k} \\ \Rightarrow \quad & (f+g) \in [l_{j,k}, u_{j,k}]. \end{aligned}$$

Damit überdecken die definierten Brackets $[l_{j,k}, u_{j,k}]$ ganz $\mathcal{F}+\mathcal{G}$. Außerdem gilt mit der Dreiecksungleichung der $\|\cdot\|_r$-Norm:

$$\begin{aligned} \|u_{j,k} - l_{j,k}\|_r &= \|(u_k^{(2)} - l_k^{(2)}) + (u_j^{(1)} - l_j^{(1)})\|_r \\ &\leq \|u_k^{(2)} - l_k^{(2)}\|_r + \|u_j^{(1)} - l_j^{(1)}\|_r \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Es wurden insgesamt $N_1 \cdot N_2$ Brackets definiert, damit folgt

$$N_r(\varepsilon, \mathcal{F}+\mathcal{G}, P) \leq N_1 \cdot N_2.$$

Aufgabe P3 (Anwendung des Satzes von Donsker für empirische Prozesse).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_i : \Omega \to \mathcal{X} = \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen.

Es gelte $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ und $M > 0$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\Big[\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos(\theta X_i) - \mathbb{E}\cos(\theta X_i)\Big)\Big]_{\theta \in [-M,M]} \xrightarrow{D} \mathbb{G} \quad \text{in} \quad (\ell^\infty([-M,M]), \|\cdot\|_{\infty,[-M,M]}),$$

wobei $\mathbb{G} = (\mathbb{G}(\theta))_{\theta \in [-M,M]}$ ein zentrierter Gauß-Prozess mit zu bestimmender Kovarianzfunktion ist.

Hinweis: Zeigen Sie zum Beispiel, dass hier die Funktionenklasse eine parametrische Lipschitz-Klasse bildet (Abgabeblatt, Aufgabe 1).

Lösung: Betrachte die Funktionenklasse

$$\mathcal{F} = \{f_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_\theta(x) = \cos(\theta x) : \theta \in [-M, M]\}.$$

Dann gilt

$$(\mathbb{G}_n(f))_{f \in \mathcal{F}} = (\mathbb{G}_n(f_\theta))_{\theta \in [-M,M]} = \Big[\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \cos(\theta X_i) - \mathbb{E}\cos(\theta X_1)\Big)\Big]_{\theta \in [-M,M]}$$

Es gilt für festes $x \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned}
\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x) - Pf| &= \sup_{\theta \in [-M,M]} |f_\theta(x) - Pf_\theta| \\
&\leq \sup_{\theta \in [-M,M]} |\cos(\theta x)| + \sup_{\theta \in [-M,M]} \mathbb{E}|\cos(\theta X_1)| \\
&\leq 2 < \infty.
\end{aligned}$$

Die Klasse $\mathcal{F}$ ist eine Lipschitz-Klasse, denn für $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f_\theta(x) - f_{\theta'}(x)| = |\cos(\theta x) - \cos(\theta' x)| \leq |\theta x - \theta' x| = |x| \cdot |\theta - \theta'| = m(x)|\theta - \theta'|$$

mit $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, m(x) = |x|$. Es ist außerdem $\|m\|_2 = \mathbb{E}[X_1^2]^{1/2}$. Mit Aufgabe 1 (der Diameter von $[-M, M]$ ist $2M$) folgt mit einer Konstanten $K > 0$:

$$N_2(\varepsilon, \mathcal{F}, P) \leq K \cdot \frac{2M}{\varepsilon} = \frac{2MK}{\varepsilon}.$$

Es folgt (mit $a \vee b = \max\{a, b\}$ und $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$):

$$\begin{aligned}
J_2(1, \mathcal{F}, P) &= \int_0^1 \sqrt{1 \vee \log N_2(\varepsilon, \mathcal{F}, P)}d\varepsilon = \int_0^1 \sqrt{1 \vee (\log(2MK) - \log(\varepsilon))}d\varepsilon \\
&\leq \sqrt{\log(2MK)} + \int_0^1 \sqrt{\log(1 + \frac{1}{\varepsilon})}d\varepsilon \\
&\overset{\log(1+x) \leq x}{\leq} \sqrt{\log(2MK)} + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}d\varepsilon \\
&\leq \sqrt{\log(2MK)} + \Big[2\sqrt{\varepsilon}\Big]_0^1 = \sqrt{\log(2MK)} + 2 < \infty.
\end{aligned}$$

Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von Donsker 1.64 erfüllt und es folgt, dass es eine straffe Zufallsvariable $\mathbb{G}$ mit Werten in $\ell^\infty(\mathcal{F})$ gibt mit

$$\mathbb{G}_n \overset{D}{\to} \mathbb{G}.$$

Es folgt:

$$\Big[\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \cos(\theta X_i) - \mathbb{E}\cos(\theta X_1)\Big)\Big]_{\theta \in [-M,M]} \overset{D}{\to} (\mathbb{G}(f_\theta))_{\theta \in [-M,M]} \qquad \text{in} \quad \ell^\infty[-M, M].$$

$\mathbb{G}$ ist ein zentrierter Gauß-Prozess, denn wegen dem zentralen Grenzwertsatz gilt für $\theta_1, ..., \theta_k \in [-M, M]$:

$$\big(\mathbb{G}_n(f_{\theta_1}), ..., \mathbb{G}_n(f_{\theta_k})\big) \overset{D}{\to} N(0, \Sigma),$$

was den Verteilungen von $\big(\mathbb{G}(f_{\theta_1}), ..., \mathbb{G}(f_{\theta_k})\big)$ entsprechen muss.

Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`