Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Präsenzblatt 5

Aufgabe P1 (Bracketing-Zahlen der mehrdimensionalen Verteilungsfunktion).

Es sei $(\mathcal{X} = \mathbb{R}^d, \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $r \geq 1$. Sei F die zu P gehörige Verteilungsfunktion, d.h.

$$F(x) = F(x_1, ..., x_d) = \mathbb{P}((-\infty, x_1] \times ... \times (-\infty, x_d]).$$

Sei

$$\mathcal{F} := \{f_t : \mathbb{R}^d \to [0,1] : f_t(x) = \mathbb{1}_{\{x \leq t\}}, t \in \mathbb{R}^d\},$$

wobei $\leq$ hier komponentenweise zu verstehen ist. Zeigen Sie, dass für $\varepsilon \in (0,1)$ gilt:

$$N_2(\varepsilon, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \leq \frac{(2d)^d}{\varepsilon^{2d}}.$$

Aufgabe P2 (Bracketing-Zahlen bei weiteren Funktionenklassen).

Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \{f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \text{ messbar}\}$ sowie $1 \leq r < \infty$. Weiter seien alle $f \in \mathcal{F}$ und $g \in \mathcal{G}$ durch eine Konstante $C > 0$ beschränkt. Definiere

$$\mathcal{F} + \mathcal{G} = \{f + g : f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$N_r(\varepsilon, \mathcal{F} + \mathcal{G}, P) \leq N_r(\frac{\varepsilon}{2}, \mathcal{F}, P) \cdot N_r(\frac{\varepsilon}{2}, \mathcal{G}, P).$$

Aufgabe P3 (Anwendung des Satzes von Donsker für empirische Prozesse).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_i : \Omega \to \mathcal{X} = \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen.

Es gelte $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ und $M > 0$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\Big[\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \cos(\theta X_i) - \mathbb{E}\cos(\theta X_i)\Big)\Big]_{\theta \in [-M,M]} \xrightarrow{D} \mathbb{G} \quad \text{in} \quad (\ell^\infty([-M,M]), \|\cdot\|_{\infty,[-M,M]}),$$

wobei $\mathbb{G} = (\mathbb{G}(\theta))_{\theta \in [-M,M]}$ ein zentrierter Gauß-Prozess mit zu bestimmender Kovarianzfunktion ist.

Hinweis: Zeigen Sie zum Beispiel, dass hier die Funktionenklasse eine parametrische Lipschitz-Klasse bildet (Abgabeblatt, Aufgabe 1).

Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`