Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Präsenzblatt 4 - Lösungen

Aufgabe P1 (Wiederholung: Satz von Donsker in D).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $Z_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}Z_1 = 0$, $\mathrm{Var}(Z_1) = \sigma^2$ und $\mathbb{E}[Z_1^4] < \infty$. Für $t \in [0,1]$ definiere

$$X_n(t) := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} Z_i$$

Zeigen Sie mittels des Konvergenzkonzepts in $D[0,1]$ (Satz 1.44), dass

$$X_n \xrightarrow{D} W \qquad \text{in } (D[0,1], d_S),$$

wobei W eine stetige Version einer Brownschen Bewegung ist.

Lösung: Wir zeigen die drei Bedingungen aus Satz 1.44.

(a) Für $x_1, ..., x_k \in [0,1]$ wurde bereits in der Vorlesung gezeigt, dass

$$(X_n(t_1), ..., X_n(t_k)) \xrightarrow{D} (W(t_1), ..., W(t_k)),$$

das heißt, die endlichdimensionalen Verteilungen von X_n konvergieren gegen die endlichdimensionalen Verteilungen von W.

(b) Da W eine stetige Version einer Brownschen Bewegung ist, gilt $\lim_{\delta\to 0} W_{1-\delta} = W_1$, also insbesondere f.s. Konvergenz und damit schwache Konvergenz.

(c) Zuletzt ist für $r \leq s \leq t, n \in \mathbb{N}$:

$$X_n(s) - X_n(r) = \sum_{i=\lfloor nr \rfloor+1}^{\lfloor ns \rfloor} Z_i \quad \text{unabhängig von} \quad X_n(t) - X_n(s) = \sum_{i=\lfloor ns \rfloor+1}^{\lfloor nt \rfloor} Z_i$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n(s) - X_n(r)|^2] &= \frac{1}{\sigma^2 n}\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=\lfloor nr \rfloor+1}^{\lfloor ns \rfloor} Z_i\Big) = \frac{1}{\sigma^2 n}\sum_{i=\lfloor nr \rfloor+1}^{\lfloor ns \rfloor} \mathrm{Var}(Z_i) \\ &= \frac{\sigma^2}{\sigma^2 n} \cdot (\lfloor ns \rfloor - \lfloor nr \rfloor) \\ &= \frac{\lfloor ns \rfloor - \lfloor nr \rfloor}{n}. \end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_n(s)-X_n(r)|^2\cdot|X_n(t)-X_n(s)|^2] &= \frac{1}{n^2}\big(\lfloor ns\rfloor-\lfloor nr\rfloor\big)\big(\lfloor nt\rfloor-\lfloor ns\rfloor\big)\\ &\le \Big(\frac{\lfloor nt\rfloor-\lfloor nr\rfloor}{n}\Big)^2.\end{aligned}$$

Falls $t-r\ge\frac{1}{n}$, so gilt

$$\lfloor nt\rfloor-\lfloor nr\rfloor\le nt-(nr-1)=n(t-r)+1\le 2n(t-r)$$

und damit

$$\Big(\frac{\lfloor nt\rfloor-\lfloor nr\rfloor}{n}\Big)^2\le(2(t-r))^2.$$

Falls $t-r<\frac{1}{n}$, liegen entweder r,s oder s,t im gleichen Teilintervall $[(i-1)/n,i/n)$, dann verschwindet die linke Seite der Ungleichung komplett. Das heißt, mit $\alpha=2$, $\beta=2>1$ und $F(t)=2t$ wurde gezeigt:

$$\mathbb{E}[|X_n(s)-X_n(r)|^\alpha\cdot|X_n(t)-X_n(s)|^\alpha]\le\big(F(t)-F(r)\big)^\beta.$$

Damit sind alle Bedingungen aus Satz 1.44 erfüllt und es folgt

$$X_n\xrightarrow{D}W\quad\text{in}\quad(D[0,1],d_S).$$

Aufgabe P2 (Wiederholung: Changepoint-Tests und Max-Statistik).

Sei $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $Z_i:\Omega\to\mathbb{R}$, $i\in\mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}Z_1=0$, $\operatorname{Var}(Z_1)=\sigma^2$ und $\mathbb{E}[Z_1^4]<\infty$. Für $t\in[0,1]$ definiere

$$X_n(t):=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor}Z_i$$

Zeigen Sie mit dem Resultat aus Aufgabe P1 und der Tatsache aus Aufgabe A2, dass:

(a) $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\max_{k\in\{0,\dots,n\}}\sum_{i=1}^k Z_i\xrightarrow{D}\max_{t\in[0,1]}W(t)$,

(a) $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\max_{k\in\{1,\dots,n\}}|\sum_{i=1}^k Z_i-\frac{k}{n}\sum_{i=1}^n Z_i|\xrightarrow{D}\sup_{t\in[0,1]}|W(t)-t\cdot W(1)|$.

wobei W eine stetige Version einer Brownschen Bewegung ist.

Lösung:

(a) Die Abbildung

$$\Phi:D[0,1]\to\mathbb{R},\quad\Phi(f)=\sup_{x\in[0,1]}f(x)$$

ist stetig in jedem $f\in C[0,1]$, denn: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $d_S(f_n,f)\to0$. Dann folgt mit Aufgabe A2: $\|f_n-f\|_\infty\to0$, also auch

$$|\Phi(f_n)-\Phi(f)|\le\Big|\sup_{x\in[0,1]}f_n(x)-\sup_{x\in[0,1]}f(x)\Big|\le\|f_n-f\|_\infty\to0.$$

Damit ist Φ stetig in f. Da laut Aufgabe P1: $X_n\xrightarrow{D}W$ und $W:\Omega\to C[0,1]$, folgt mit dem CMT

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\max_{k\in\{0,\dots,n\}}\sum_{i=1}^k Z_i=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\cdot\sup_{x\in[0,1]}\sum_{i=1}^{\lfloor nx\rfloor}Z_i=\Phi(X_n)\xrightarrow{D}\Phi(W)=\sup_{x\in[0,1]}W(x)=\max_{x\in[0,1]}W(x).$$

(b) Die Abbildung

$$\Phi : D[0,1] \to \mathbb{R}, \quad \Phi(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - x \cdot f(1)|$$

ist stetig in jedem $f \in C[0,1]$, denn: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $d_S(f_n, f) \to 0$. Dann folgt mit Aufgabe A2: $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\big|\Phi(f_n) - \Phi(f)\big| &= \Big|\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - x \cdot f_n(1)| - \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - x \cdot f(1)|\Big| \\
&\le \sup_{x\in[0,1]} \big|(f_n(x) - x \cdot f_n(1)) - (f(x) - x \cdot f(1))\big| \\
&\le \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |x| \cdot |f_n(1) - f(1)| \le 2\|f_n - f\|_\infty \to 0,
\end{aligned}$$

das heißt, Φ ist stetig in f. Da laut Aufgabe 1: $X_n \xrightarrow{D} W$ und $W : \Omega \to C[0,1]$, folgt mit dem CMT

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sup_{t\in[0,1]} \Big|\sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor} Z_i - t\cdot \sum_{i=1}^{n} Z_i\Big| = \Phi(X_n) \xrightarrow{D} \Phi(W) = \sup_{t\in[0,1]} |W(t) - t\cdot W(1)| = \max_{t\in[0,1]} |W(t) - t\cdot W(1)|.$$

Ersetze nun t links durch $\frac{\lfloor nt\rfloor}{n}$, so gilt

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sup_{t\in[0,1]} \Big|\sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor} Z_i - t \cdot \sum_{i=1}^{n} Z_i\Big| - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sup_{t\in[0,1]} \Big|\sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor} Z_i - \frac{\lfloor nt\rfloor}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Z_i\Big|\Big| \\
\le\ & \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sup_{t\in[0,1]} \Big|\Big(\sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor} Z_i - t \cdot \sum_{i=1}^{n} Z_i\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor} Z_i - \frac{\lfloor nt\rfloor}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Z_i\Big)\Big| \\
\le\ & \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sup_{t\in[0,1]} \underbrace{\Big|t - \frac{\lfloor nt\rfloor}{n}\Big|}_{\le n^{-1}} \cdot \sum_{i=1}^{n} |Z_i| \\
\le\ & \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |Z_i|}_{\to \mathbb{E}|Z_1|} \to 0 \quad \text{f.s.}
\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Slutzky folgt

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sup_{t\in[0,1]} \Big|\sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor} Z_i - \frac{\lfloor nt\rfloor}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Z_i\Big| = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sup_{k\in\{1,\dots,n\}} \Big|\sum_{i=1}^{k} Z_i - \frac{k}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Z_i\Big| \xrightarrow{D} \max_{t\in[0,1]} |W(t) - t\cdot W(1)|.$$

Aufgabe P3 (Eigenschaften von D und d_S).

Betrachtet wird der Raum $(D[0,1], d_S)$ mit der Skorokhod-Metrik. Zeigen Sie:

(a) Es gilt für $f, g \in D[0,1]$: $d_S(f,g) \le \|f - g\|_\infty$.

(b) d_S ist eine Metrik.

(c) Ist $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ und $\alpha \in [0,1)$ mit $\alpha_n \downarrow \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n > \alpha$, so gilt

$$d_S(\mathbb{1}_{[0,\alpha_n)}, \mathbb{1}_{[0,\alpha)}) \to 0, \quad \text{aber} \quad \|\mathbb{1}_{[0,\alpha_n)} - \mathbb{1}_{[0,\alpha)}\|_\infty \not\to 0.$$

Lösung:

(a) Für $f, g \in D[0,1]$ gilt

$$d_S(f,g) = \inf_{\lambda\in\Lambda} \max\left\{\|\lambda - id\|_\infty, \|f - g\circ\lambda\|_\infty\right\} \overset{\lambda=id}{\leq} \|f-g\|_\infty.$$

wobei $\Lambda = \{\lambda : [0,1] \to [0,1]$ stetig, bijektiv und streng monoton wachsend$\}$.

(b) d_S ist offensichtlich nichtnegativ. d_S ist symmetrisch, denn: Für $f, g \in D[0,1]$ sei $\lambda \in \Lambda$ beliebig. Dann ist

$$\|\lambda - id\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda(x) - x| \overset{u=\lambda(x)}{=} \sup_{u\in[0,1]} |u - \lambda^{-1}(u)| = \|id - \lambda^{-1}\|_\infty,$$

und

$$\|f - g\circ\lambda\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(\lambda(x))| \overset{u=\lambda(x)}{=} \sup_{u\in[0,1]} |f(\lambda^{-1}(u)) - g(u)| = \|g - f\circ\lambda^{-1}\|_\infty.$$

Da $\Lambda = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \Lambda\}$ (*), folgt

$$\begin{aligned} d_S(f,g) &= \inf_{\lambda\in\Lambda} \max\left\{\|\lambda - id\|_\infty, \|f - g\circ\lambda\|_\infty\right\} \\ &= \inf_{\lambda\in\Lambda} \max\left\{\|\lambda^{-1} - id\|_\infty, \|g - f\circ\lambda^{-1}\|_\infty\right\} \\ &\overset{(*)}{=} \inf_{\lambda\in\Lambda} \max\left\{\|\lambda - id\|_\infty, \|g - f\circ\lambda\|_\infty\right\} = d_S(g,f). \end{aligned}$$

Zuletzt erfüllt d_S die Dreiecksungleichung, denn seien $f, g, h \in D[0,1]$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Dann gilt $\lambda_1 \circ \lambda_2 \in \Lambda$, und

$$\begin{aligned} \|\lambda_1\circ\lambda_2 - id\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} |\lambda_1(\lambda_2(x)) - x| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |\lambda_1(\lambda_2(x)) - \lambda_2(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |\lambda_2(x) - x| \\ &\leq \|\lambda_1 - id\|_\infty + \|\lambda_2 - id\|_\infty. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \|f - h\circ(\lambda_1\circ\lambda_2)\|_\infty &\leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - h(\lambda_1(\lambda_2(x)))| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(\lambda_2(x))| + \sup_{x\in[0,1]} |g(\lambda_2(x)) - h(\lambda_1(\lambda_2(x)))| \\ &\overset{u=\lambda_2(x)}{\leq} \|f - g\circ\lambda_2\|_\infty + \|g - h\circ\lambda_1\|_\infty. \end{aligned}$$

Damit ist insgesamt

$$\begin{aligned} &\max\left\{\|\lambda_1\circ\lambda_2 - id\|_\infty, \|f - h\circ(\lambda_1\circ\lambda_2)\|_\infty\right\} \\ \leq\ &\max\left\{\|\lambda_1 - id\|_\infty + \|\lambda_2 - id\|_\infty, \|f - g\circ\lambda_2\|_\infty + \|g - h\circ\lambda_1\|_\infty\right\} \\ \leq\ &\max\left\{\|\lambda_1 - id\|_\infty, \|g - h\circ\lambda_1\|_\infty\right\} + \max\left\{\|\lambda_2 - id\|_\infty, \|f - g\circ\lambda_2\|_\infty\right\}. \end{aligned}$$

Infimum über $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ und die Tatsache $\{\lambda_1\circ\lambda_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda\} \subset \Lambda$ liefert

$$\begin{aligned} d_S(f,h) &\leq \inf_{\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda} \max\left\{\|\lambda_1\circ\lambda_2 - id\|_\infty, \|f - h\circ(\lambda_1\circ\lambda_2)\|_\infty\right\} \\ &\leq \inf_{\lambda_1\in\Lambda} \max\left\{\|\lambda_1 - id\|_\infty, \|g - h\circ\lambda_1\|_\infty\right\} + \inf_{\lambda_2\in\Lambda} \max\left\{\|\lambda_2 - id\|_\infty, \|f - g\circ\lambda_2\|_\infty\right\} \\ &= d_S(g,h) + d_S(f,g). \end{aligned}$$

(c) Seien $(\alpha_n)_{n\in[0,1]} \subset [0,1]$ mit $\alpha_n \downarrow \alpha \in [0,1)$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\|\mathbb{1}_{[0,\alpha_n)} - \mathbb{1}_{[0,\alpha)}\|_\infty \geq |\mathbb{1}_{[0,\alpha_n)}(\alpha) - \mathbb{1}_{[0,\alpha)}(\alpha)| = |1-0| = 1,$$

also

$$\|\mathbb{1}_{[0,\alpha_n)} - \mathbb{1}_{[0,\alpha)}\|_\infty \not\to 0.$$

Definiere für $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda_n : [0,1] \to [0,1], \quad \lambda_n(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha_n} x, & x < \alpha_n, \\ \frac{1-\alpha}{1-\alpha_n} \cdot (x - \alpha_n) + \alpha, & x \geq \alpha_n. \end{cases}$$

Dann ist

$$d_S(\mathbb{1}_{[0,\alpha_n)}, \mathbb{1}_{[0,\alpha)}) \leq \max\left\{\|\lambda_n - id\|_\infty, \|\mathbb{1}_{[0,\alpha_n)} - \mathbb{1}_{[0,\alpha)} \circ \lambda_n\|_\infty\right\}$$

Wir werten nun die beiden Terme getrennt aus:

- Für $x \geq \alpha_n$ gilt: $\lambda_n(x) \geq \alpha$, daher

  $$(\mathbb{1}_{[0,\alpha)} \circ \lambda_n)(x) = \mathbb{1}_{[0,\alpha)}(\lambda_n(x)) = 0$$

  und für $x < \alpha_n$ gilt: $\lambda_n(x) < \alpha$, daher

  $$(\mathbb{1}_{[0,\alpha)} \circ \lambda_n)(x) = \mathbb{1}_{[0,\alpha)}(\lambda_n(x)) = 1.$$

  Damit ist $\mathbb{1}_{[0,\alpha_n)} = \mathbb{1}_{[0,\alpha)} \circ \lambda_n$, und daher

  $$\|\mathbb{1}_{[0,\alpha_n)} - \mathbb{1}_{[0,\alpha)} \circ \lambda_n\|_\infty = 0.$$

- Es ist für $x < \alpha_n$:

  $$|\lambda_n(x) - x| = \left|\frac{\alpha}{\alpha_n} x - x\right| = \frac{|\alpha - \alpha_n|}{\alpha_n} \cdot x \leq \frac{|\alpha - \alpha_n|}{\alpha_n},$$

  und für $x \geq \alpha_n$:

  $$\begin{aligned} |\lambda_n(x) - x| &= \left|\frac{1-\alpha}{1-\alpha_n} \cdot (x - \alpha_n) + \alpha - x\right| \\ &= \left|\frac{1-\alpha}{1-\alpha_n} \cdot \big((1-\alpha_n) + (x-1)\big) + \big((1-x) - (1-\alpha)\big)\right| \\ &= \left|\frac{1-\alpha}{1-\alpha_n} \cdot (x-1) - (x-1)\right| \\ &= \left|\frac{\alpha_n - \alpha}{1-\alpha_n} \cdot (x-1)\right| \\ &= \frac{|\alpha_n - \alpha|}{1-\alpha_n} \cdot (1-x) \leq \frac{|\alpha_n - \alpha|}{1-\alpha_n}. \end{aligned}$$

  Insgesamt wurde gezeigt:

  $$\|\lambda_n - id\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda_n(x) - x| \leq \max\left\{\frac{|\alpha - \alpha_n|}{\alpha_n}, \frac{|\alpha_n - \alpha|}{1-\alpha_n}\right\} \to 0.$$

  Damit ist insgesamt

  $$d_S(\mathbb{1}_{[0,\alpha_n)}, \mathbb{1}_{[0,\alpha)}) \leq \max\left\{\|\lambda_n - id\|_\infty, \|\mathbb{1}_{[0,\alpha_n)} - \mathbb{1}_{[0,\alpha)} \circ \lambda_n\|_\infty\right\} \to 0.$$

Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`