Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Präsenzblatt 4

Aufgabe P1 (Wiederholung: Satz von Donsker in D).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $Z_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}Z_1 = 0$, $\mathrm{Var}(Z_1) = \sigma^2$ und $\mathbb{E}[Z_1^4] < \infty$. Für $t \in [0,1]$ definiere

$$X_n(t) := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} Z_i$$

Zeigen Sie mittels des Konvergenzkonzepts in $D[0,1]$ (Satz 1.44), dass

$$X_n \xrightarrow{D} W \qquad \text{in } (D[0,1], d_S),$$

wobei W eine stetige Version einer Brownschen Bewegung ist.

Aufgabe P2 (Wiederholung: Changepoint-Tests und Max-Statistik).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $Z_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}Z_1 = 0$, $\mathrm{Var}(Z_1) = \sigma^2$ und $\mathbb{E}[Z_1^4] < \infty$. Für $t \in [0,1]$ definiere

$$X_n(t) := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} Z_i$$

Zeigen Sie mit dem Resultat aus Aufgabe P1 und der Tatsache aus Aufgabe A2, dass:

(a) $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{k\in\{0,\dots,n\}} \sum_{i=1}^k Z_i \xrightarrow{D} \max_{t\in[0,1]} W(t)$,

(a) $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{k\in\{1,\dots,n\}} |\sum_{i=1}^k Z_i - \frac{k}{n}\sum_{i=1}^n Z_i| \xrightarrow{D} \sup_{t\in[0,1]} |W(t) - t\cdot W(1)|$.

wobei W eine stetige Version einer Brownschen Bewegung ist.
Lösung:

Aufgabe P3 (Eigenschaften von D und d_S).
Betrachtet wird der Raum $(D[0,1], d_S)$ mit der Skorokhod-Metrik. Zeigen Sie:

(a) Es gilt für $f, g \in D[0,1]$: $d_S(f,g) \le \|f - g\|_\infty$.

(b) d_S ist eine Metrik.

(c) Ist $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ und $\alpha \in [0,1)$ mit $\alpha_n \downarrow \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n > \alpha$, so gilt

$$d_S(\mathbb{1}_{[0,\alpha_n)}, \mathbb{1}_{[0,\alpha)}) \to 0, \quad \text{aber} \quad \|\mathbb{1}_{[0,\alpha_n)} - \mathbb{1}_{[0,\alpha)}\|_\infty \not\to 0.$$

Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`