Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Präsenzblatt 3

Aufgabe P1 (Nachweis einer schwachen Konvergenz).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $Z_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[Z_1^2] < \infty$. Für $t \in [0,1]$ definiere

$$X_n(t) := \sqrt{n} \cdot \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \cos(tZ_i) - \mathbb{E}\cos(tZ_1)\Big).$$

Zeigen Sie mittels des entwickelten Konvergenzkonzepts, dass

$$X_n \xrightarrow{D} G \quad \text{in } (C[0,1], \|\cdot\|_\infty),$$

wobei G ein zentrierter stetiger Gaußscher Prozess mit Kovarianzfunktion

$$\gamma(s,t) = \mathbb{E}[\cos(tZ_1)\cos(sZ_1)] - \mathbb{E}\cos(tZ_1)\mathbb{E}\cos(sZ_1)$$

ist.

Lösung: Zu zeigen sind die beiden Teile des Konvergenzkonzepts für $C[0,1]$, das heißt, Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen (fidis) und Nachrechnen der Bedingungen von Satz 1.35 (Kolmogorov-Kriterium für stochastisch gleichgradige Stetigkeit).

(i) *fidi-Konvergenz:* Seien $k \in \mathbb{N}$, $t_1, ..., t_k \in T$. Da die Z_i i.i.d. sind, sind auch die Zufallsvektoren

$$\Big(\cos(t_1 Z_i), ..., \cos(t_k Z_i)\Big), \quad i \in \mathbb{N}$$

i.i.d.
Außerdem gilt

$$\mathbb{E}[\cos(tZ_1)^2] \leq 1 < \infty.$$

Mit dem multivariaten zentralen Grenzwertsatz folgt

$$\begin{pmatrix} X_n(t_1) \\ \vdots \\ X_n(t_k) \end{pmatrix} = \sqrt{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} \cos(t_1 Z_i) \\ \vdots \\ \cos(t_k Z_i) \end{pmatrix} - \mathbb{E}\begin{pmatrix} \cos(t_1 Z_1) \\ \vdots \\ \cos(t_k Z_1) \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{D} N(0, \Sigma)$$

mit $\Sigma_{jl} = \mathrm{Cov}(\cos(t_j Z_1), \cos(t_l Z_k)) = \mathbb{E}[\cos(t_j Z_1)\cos(t_l Z_1)] - \mathbb{E}\cos(t_j Z_1)\mathbb{E}\cos(t_l Z_1) = \gamma(t_j, t_l)$.
Sei nun also $X = (X(t))_{t \in T}$ ein stetiger zentrierter Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion $\gamma(s,t)$ wie in der Aufgabe. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} X_n(t_1) \\ \vdots \\ X_n(t_k) \end{pmatrix} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix} X(t_1) \\ \vdots \\ X(t_k) \end{pmatrix},$$

das heißt, die endlichdimensionalen Verteilungen von X_n konvergieren gegen diejenigen von X.

(ii) *Kolmogorov-Stetigkeitskriterium:* Seien $s, t \in [0,1]$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_n(t) - X_n(s)|^2] &= \frac{1}{n}\mathbb{E}\Big|\sum_{i=1}^{n}\big((\cos(tZ_i) - \cos(sZ_i)) - \mathbb{E}(\cos(tZ_1) - \cos(sZ_1))\Big|^2 \\
&= \frac{1}{n}\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n}\big(\cos(tZ_i) - \cos(sZ_i)\big)\Big) \\
&\overset{Z_i \text{ i.i.d.}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(e^{tZ_1} - e^{sZ_1}) \\
&= \mathrm{Var}(\cos(tZ_i) - \cos(sZ_i)) \\
&\leq \mathbb{E}[(\cos(tZ_i) - \cos(sZ_i))^2] \\
&\leq \mathbb{E}[|tZ_i - sZ_i|^2] = \mathbb{E}[Z_1^2] \cdot |t-s|^2.
\end{aligned}$$

Damit ist die Voraussetzung des Kolmogorov-Kriteriums (1.35) nachgerechnet und es folgt, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gleichgradig stetig ist.

Aus (i) und (ii) folgt $X_n \overset{D}{\to} X$ mit X ein stetiger zentrierter Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion $\gamma(s,t) = \mathbb{E}[\cos(tZ_1)\cos(sZ_1)] - \mathbb{E}\cos(tZ_1)\mathbb{E}\cos(sZ_1)$.

Aufgabe P2 (Das CMT und der empirische Prozess).

Sei $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $U[0,1]$-verteilten reellen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Verteilungsfunktion $F(t) := t$ für $t \in [0,1]$. Sei $\hat{F}_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\{Y_i \leq t\}}$ die empirische Verteilungsfunktion. Sei

$$G_n(t) := \sqrt{n}(\hat{F}_n(t) - F(t)).$$

Eine weitere stetige Approximation $\tilde{G}_n$ ist die lineare Interpolation der Punkte

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}Y_{1:n}\\ \frac{1}{n}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}Y_{2:n}\\ \frac{2}{n}\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}Y_{n:n}\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

wobei $Y_{1:n} < \ldots < Y_{n:n}$ die Ordnungsstatistiken von $Y_1, \ldots, Y_n$ bezeichnen. Es ist bekannt:

- $\|\tilde{G}_n - G_n\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$,
- $\tilde{G}_n \overset{D}{\to} W^\circ$ in $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, wobei W° eine Brownsche Brücke ist.

Zeigen Sie:

(a) $T_n := \sqrt{n}\sup_{t\in[0,1]}|\hat{F}_n(t) - F(t)| \overset{D}{\to} \sup_{t\in[0,1]}|W^\circ(t)|$ (*Kolmogorov-Smirnov*),

(b) $T_n := n \cdot \int_0^1 \left\{\hat{F}_n(t) - F(t)\right\}^2 \, dt \overset{D}{\to} \int_0^1 W^\circ(t)^2 \, dt$ (*Cramer-von-Mises*).

Lösung:

(a) Es ist bekannt, dass

$$\Phi : C[0,1] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$$

Lipschitz-stetige mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ ist. Mit dem CMT angewandt auf die bekannte schwache Konvergenz $\tilde{G}_n \xrightarrow{D} W^\circ$ folgt

$$\Phi(\tilde{G}_n) \xrightarrow{D} \Phi(W^\circ) = \max_{t\in[0,1]} |W^\circ(t)|.$$

Damit folgt

$$\big|\Phi(\tilde{G}_n) - \Phi(G_n)\big| \le \|\tilde{G}_n - G_n\|_\infty \le \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Es folgt mit dem Satz von Slutzky:

$$\sqrt{n} \sup_{t\in[0,1]} |\hat{F}_n(t) - F(t)| = \Phi(G_n) \xrightarrow{D} \|B^\circ\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |B^\circ(t)|.$$

(b) Es ist bereits bekannt, dass

$$\Phi : C[0,1] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t$$

stetig ist und erfüllt

$$\big|\Phi(f) - \Phi(g)\big| \le \|f-g\|_\infty \cdot \big(2\|f\|_\infty + \|f-g\|_\infty\big).$$

Anwendung des CMT auf $\tilde{G}_n \xrightarrow{D} W^\circ$ liefert

$$\Phi(\tilde{G}_n) \xrightarrow{D} \Phi(W^\circ).$$

Es folgt außerdem

$$\big|\Phi(G_n) - \Phi(\tilde{G}_n)\big| \le \|G_n - \tilde{G}_n\|_\infty \cdot \big(2\|\tilde{G}\|_\infty + \|\tilde{G}_n - G_n\|_\infty\big) \le \frac{1}{\sqrt{n}}\big(2\|\tilde{G}\|_\infty + \frac{1}{\sqrt{n}}\big) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Mit dem Satz von Slutzky folgt

$$n \cdot \int_0^1 \big\{\hat{F}_n(t) - F(t)\big\}^2 \,\mathrm{d}t = \Phi(G_n) \xrightarrow{D} \Phi(W^\circ) = \int_0^1 (W^\circ(t))^2 \,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe P3 (Schwache Konvergenz von Gauß-Prozessen).
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_n, X : \Omega \to C[0,1]$ stetige Gauß-Prozesse mit Mittelwertfunktionen $\mu_n, \mu : [0,1] \to \mathbb{R}$ und Kovarianzfunktionen $\gamma_n, \gamma : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$. Es gelten die punktweisen Konvergenzen

$$\forall s,t \in [0,1] : \quad \mu_n(t) \to \mu(t), \quad \gamma_n(s,t) \to \gamma(s,t),$$

und es gebe $L_1, L_2 > 0$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall s,t \in [0,1] : \quad |\mu_n(t) - \mu_n(s)| \le L_1, \qquad |\gamma_n(t,t) - 2\gamma_n(s,t) + \gamma_n(s,s)| \le L_1|s-t|^2.$$

Zeigen Sie, dass

$$X_n \xrightarrow{D} X.$$

Lösung: Zu zeigen sind die beiden Teile des Konvergenzkonzepts für $C[0,1]$, das heißt, Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen (fidis) und Nachrechnen der Bedingungen von Satz 1.35 (Kolmogorov-Kriterium für stochastisch gleichgradige Stetigkeit).

(i) *fidi-Konvergenz:* Seien $k \in \mathbb{N}$, $t_1, ..., t_k \in T$. Da X_n Gauß-Prozess, ist

$$\begin{pmatrix} X_n(t_1) \\ \vdots \\ X_n(t_k) \end{pmatrix} \sim N(m_n, \Sigma_n)$$

mit

$$m_n = (\mu_n(t_1), ..., \mu_n(t_k)), \qquad \Sigma_n = (\gamma_n(t_i, t_j))_{i,j=1,\dots,k}.$$

Aufgrund der vorausgesetzten punktweisen Konvergenz von $\mu_n \to \mu$, $\gamma_n \to \gamma$ folgt für $n \to \infty$

$$m_n \to (\mu(t_1), ..., \mu(t_k)) =: m, \qquad \Sigma_n \to (\gamma(t_i, t_j))_{i,j=1,\dots,k} =: \Sigma.$$

Das heißt, die Parameter von $N(m_n, \Sigma_n)$ konvergieren gegen die Parameter von $N(m, \Sigma)$. Mit Wahrscheinlichkeitstheorie 1 (charakteristische Funktionen) folgt, dass

$$N(m_n, \Sigma_n) \xrightarrow{D} N(m, \Sigma),$$

also auch (da $(X(t_1), ..., X(t_k)) \sim N(m, \Sigma)$):

$$\begin{pmatrix} X_n(t_1) \\ \vdots \\ X_n(t_k) \end{pmatrix} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix} X(t_1) \\ \vdots \\ X(t_k) \end{pmatrix},$$

das heißt, die endlichdimensionalen Verteilungen von X_n konvergieren gegen diejenigen von X.

(ii) *Kolmogorov-Stetigkeitskriterium:* Seien $s, t \in [0,1]$. Dann gilt:

$$(X_n(s), X_n(t)) \sim N(m, \Sigma)$$

mit

$$m = (\mu_n(s), \mu_n(t)), \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \gamma_n(s,s) & \gamma_n(s,t) \\ \gamma_n(s,t) & \gamma_n(t,t) \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n(t) - X_n(s)|^2] &= \operatorname{Var}(X_n(t) - X_n(s)) + \mathbb{E}[X_n(t) - X_n(s)]^2 \\ &= \gamma_n(t,t) - 2\gamma_n(s,t) + \gamma_n(s,s) + (\mu_n(s) - \mu_n(t))^2 \\ &\overset{\text{Vorauss.}}{\leq} L_2|t-s|^2 + L_1^2|t-s|^2 = (L_2 + L_1^2)|t-s|^2. \end{aligned}$$

Damit ist die Voraussetzung des Kolmogorov-Kriteriums 1.35 nachgerechnet und es folgt, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gleichgradig stetig ist.

Aus (i) und (ii) folgt $X_n \xrightarrow{D} X$.

Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`