Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Präsenzblatt 3

Aufgabe P1 (Nachweis einer schwachen Konvergenz).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $Z_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[Z_1^2] < \infty$. Für $t \in [0,1]$ definiere

$$X_n(t) := \sqrt{n} \cdot \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos(tZ_i) - \mathbb{E}\cos(tZ_1)\Big).$$

Zeigen Sie mittels des entwickelten Konvergenzkonzepts, dass

$$X_n \xrightarrow{D} G \quad \text{in } (C[0,1], \|\cdot\|_\infty),$$

wobei G ein zentrierter stetiger Gaußscher Prozess mit Kovarianzfunktion

$$\gamma(s,t) = \mathbb{E}[\cos(tZ_1)\cos(sZ_1)] - \mathbb{E}\cos(tZ_1)\mathbb{E}\cos(sZ_1)$$

ist.

Aufgabe P2 (Das CMT und der empirische Prozess).

Sei $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $U[0,1]$-verteilten reellen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Verteilungsfunktion $F(t) := t$ für $t \in [0,1]$. Sei $\hat{F}_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Y_i \le t\}}$ die empirische Verteilungsfunktion. Sei

$$G_n(t) := \sqrt{n}(\hat{F}_n(t) - F(t)).$$

Eine weitere stetige Approximation $\tilde{G}_n$ ist die lineare Interpolation der Punkte

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}Y_{1:n}\\ \frac{1}{n}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}Y_{2:n}\\ \frac{2}{n}\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix}Y_{n:n}\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

wobei $Y_{1:n} < ... < Y_{n:n}$ die Ordnungsstatistiken von $Y_1, ..., Y_n$ bezeichnen. Es ist bekannt:

- $\|\tilde{G}_n - G_n\|_\infty \le \frac{1}{\sqrt{n}}$,
- $\tilde{G}_n \xrightarrow{D} W^\circ$ in $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, wobei W° eine Brownsche Brücke ist.

Zeigen Sie:

(a) $T_n := \sqrt{n}\sup_{t\in[0,1]} |\hat{F}_n(t) - F(t)| \xrightarrow{D} \sup_{t\in[0,1]} |W^\circ(t)|$ (*Kolmogorov-Smirnov*),

(b) $T_n := n \cdot \int_0^1 \left\{\hat{F}_n(t) - F(t)\right\}^2 \, dt \xrightarrow{D} \int_0^1 W^\circ(t)^2 \, dt$ (*Cramer-von-Mises*).

Aufgabe P3 (Schwache Konvergenz von Gauß-Prozessen).

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_n, X : \Omega \to C[0,1]$ stetige Gauß-Prozesse mit Mittelwertfunktionen $\mu_n, \mu : [0,1] \to \mathbb{R}$ und Kovarianzfunktionen $\gamma_n, \gamma : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$. Es gelten die punktweisen Konvergenzen

$$\forall s, t \in [0,1] : \quad \mu_n(t) \to \mu(t), \quad \gamma_n(s,t) \to \gamma(s,t),$$

und es gebe $L_1, L_2 > 0$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall s, t \in [0,1] : \quad |\mu_n(t) - \mu_n(s)| \leq L_1, \qquad |\gamma_n(t,t) - 2\gamma_n(s,t) + \gamma_n(s,s)| \leq L_1 |s-t|^2.$$

Zeigen Sie, dass

$$X_n \stackrel{D}{\to} X.$$

Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`