Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Präsenzblatt 2 - Lösungen

Aufgabe P1 (Schwache und stochastische Konvergenz).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (S, d) ein metrischer Raum ausgestattet mit der Borelschen Sigma-Algebra $\mathcal{B}(S)$. Seien $Y_n, X_n, X, Y : \Omega \to S$ messbare Abbildungen. Zeigen Sie:

(i) Wir betrachten die vereinfachte Version des Continuous mapping theorems (CMT): Ist (S', d') ein weiterer metrischer Raum und $\Phi : S \to S'$ stetig, so gilt

$$X_n \xrightarrow{D} X \quad \Rightarrow \quad \Phi(X_n) \xrightarrow{D} \Phi(X).$$

Zeigen Sie die Aussage einmal direkt mit der Definition der schwachen Konvergenz und einmal mit Hilfe des Portmanteau-Lemmas (ii) (offene Mengen).

(ii) Gilt $X_n \xrightarrow{D} X$ und ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ eine konvergente Folge in S mit $c_n \to c \in S$, so gilt

$$d(X_n, c_n) \xrightarrow{D} d(X, c).$$

Hinweis: Reduzieren Sie die Aussage mit dem Lemma von Slutzky daraus, dass noch $d(X_n, c) \xrightarrow{D} d(X, c)$ zu zeigen ist. Wenden Sie dann das CMT an.

(iii) Versieht man $S \times S$ mit der Produkt-Sigma-Algebra und der Produkt-Metrik

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2),$$

so gilt

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X, \quad Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y \quad \Rightarrow \quad (X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X, Y).$$

Lösung:

(i) Es gelte $X_n \xrightarrow{D} X$. Wir zeigen $\Phi(X_n) \xrightarrow{D} \Phi(X)$ die beiden geforderten Varianten des Beweises:

- Mit der Definition der schwachen Konvergenz: Sei $g : S' \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Da $\Phi : S \to S'$ stetig, ist
$$(g \circ \Phi) : S \to \mathbb{R}$$
stetig und beschränkt. Da $X_n \xrightarrow{D} X$, folgt
$$\mathbb{E}g(\Phi(X_n)) = \mathbb{E}(g \circ \Phi)(X_n) \to \mathbb{E}(g \circ \Phi)(X) = \mathbb{E}g(\Phi(X)).$$
Damit ist die Definition von $\Phi(X_n) \xrightarrow{D} \Phi(X)$ nachgerechnet.

- Mit dem Portmanteau-Lemma (ii): Sei $O \subset S'$ offen. Da $\Phi : S \to S'$ stetig ist, ist $\Phi^{-1}(O) \subset S$ ebenfalls offen. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(\Phi(X_n) \in O) &= \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in \Phi^{-1}(O)) \\
&\overset{\text{Portmanteau, } X_n \xrightarrow{D} X}{\geq} \mathbb{P}(X \in \Phi^{-1}(O)) = \mathbb{P}(\Phi(X) \in O).
\end{aligned}$$

Mit dem Portmanteau-Lemma (ii) folgt, dass $\Phi(X_n) \xrightarrow{D} \Phi(X)$.

(ii) Wir zeigen:

- 1) $|d(X_n, c_n) - d(X_n, c)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$
- 2) $d(X_n, c) \xrightarrow{D} d(X, c)$.

Dann folgt mit dem Satz von Slutzky $d(X_n, c_n) \xrightarrow{D} d(X, c)$.
Beweis der beiden Aussagen 1) und 2):

- Zu 1): Es gilt laut Voraussetzung $c_n \to c$, also insbesondere $c_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$. Damit folgt mit umgekehrter Δ-Ungleichung:

$$|d(X_n, c_n) - d(X_n, c)| \leq d(c_n, c) = 0 + d(c_n, c) = d(c_n, c) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

- Zu 2): Nutze, dass $g : S \to \mathbb{R}$, $g(x) = d(x, c)$ eine stetige Abbildung ist: Nach Δ-Ungleichung gilt

$$|g(x) - g(x')| = |d(x, c) - d(x', c)| \leq d(x, x'),$$

also ist g sogar Lipschitz-stetig mit Konstante 1, insbesondere stetig.
Mit dem CMT angewandt auf $X_n \xrightarrow{D} X$ und g folgt

$$d(X_n, c) = g(X_n) \xrightarrow{D} g(X) = d(X, c).$$

(iii) Es gilt

$$d((X_n, Y_n), (X, Y)) \overset{\text{Def.}}{=} d(X_n, X) + d(Y_n, Y) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

wegen $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ und weil in $\mathbb{R}$ bereits bekannt ist, dass stochastische Konvergenz sich auf Summen überträgt.

Aufgabe P2 (Stetige Funktionale).

Wir betrachten den metrischen Raum $(C(T), \|\cdot\|_\infty)$ mit $T \subset \mathbb{R}$ kompakt. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionale stetig sind. Hierbei wird $C(T) \times \mathbb{R}$ mit der Produktmetrik $d((f, x), (g, y)) = d(f, g) + |x - y|$ ausgestattet.

$$\begin{aligned}
(a) \quad \Phi : C(T) \to \mathbb{R}, \quad \Phi(f) &= \int |f(t)| dt \\
(b) \quad \Phi : C(T) \times T \to \mathbb{R}, \quad \Phi(f, x) &= f(x) \\
(c) \quad \Phi : C(T) \to \mathbb{R}, \quad \Phi(f) &= \min_{t \in T} g(t)
\end{aligned}$$

Lösung:

(a) Für $f, f_0 \in C(T)$ gilt für alle $t \in T$:

$$|f(t) - f_0(t)| \leq \|f - f_0\|_\infty.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
|\Phi(f) - \Phi(f_0)| &= \Big| \int_T |f(t)| dt - \int_T |f_0(t)| dt \Big| \\
&\leq \int_T \underbrace{\big| |f(t)| - |f_0(t)| \big|}_{\leq |f(t)-f_0(t)| \leq \|f-f_0\|_\infty} \; dt \\
&\leq \lambda(T) \cdot \|f - f_0\|_\infty. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\lambda(T)$ das Lebesgue-Maß von T. Dieses ist endlich, da $T \subset \mathbb{R}$ kompakt und daher beschränkt ist.
Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(T)$ eine Folge mit $\|f_n - f_0\|_\infty$. Dann gilt

$$|\Phi(f_n) - \Phi(f)| \leq \lambda(T) \cdot \underbrace{\|f_n - f_0\|_\infty}_{\to 0} \to 0.$$

Damit ist Φ stetig.
Alternative: Aus (*) folgt direkt, dass Φ Lipschitz-stetig mit Konstante $\lambda(T)$ ist, also ist Φ auch stetig.

(b) Für $(f, x), (f_0, x_0) \in C(T) \times T$ gilt:

$$\begin{aligned}
|\Phi(f, x) - \Phi(f_0, x_0)| &= \big| f(x) - f_0(x_0) \big| \\
&\leq \big| f(x) - f_0(x) \big| + \big| f_0(x) - f_0(x_0) \big| \\
&\leq \|f - f_0\|_\infty + \big| f_0(x) - f_0(x_0) \big|.
\end{aligned}$$

Sei nun $((f_n, x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset C(T) \; \times T$ eine Folge mit $d((f_n, x_n), (f_0, x_0)) \to 0$. Dann gilt

$$\|f_n - f_0\|_\infty + |x_n - x_0| = d((f_n, x_n), (f_0, x_0)) \to 0,$$

also $\|f_n - f_0\|_\infty \to 0$ und $x_n \to x_0$. Da f_0 stetig ist, folgt

$$|\Phi(f_n, x_n) - \Phi(f_0, x_0)| \leq \underbrace{\|f_n - f_0\|_\infty}_{\to 0} + \underbrace{\big| f_0(x_n) - f_0(x_0) \big|}_{f_0 \text{ stetig}, \, x_n \to x_0 \atop \to 0} \to 0.$$

Also ist Φ stetig.

(c) Seien $f, f_0 \in C(T)$. Dann gilt für alle $t \in T$:

$$f(t) = f(t) - f_0(t) + f_0(t) \leq |f(t) - f_0(t)| + f_0(t) \leq \|f - f_0\|_\infty + f_0(t),$$

also

$$\min_{t\in T} f(t) \leq \|f - f_0\|_\infty + \min_{t\in T} f_0(t)$$

bzw.

$$\min_{t\in T} f(t) - \min_{t\in T} f_0(t) \leq \|f - f_0\|_\infty.$$

Anwendung desselben Vorgehens mit vertauschten Rollen für f, f_0 liefert

$$\min_{t\in T} f_0(t) - \min_{t\in T} f(t) \le \|f_0 - f\|_\infty = \|f - f_0\|_\infty.$$

Damit ist gezeigt, dass

$$\big|\Phi(f) - \Phi(f_0)\big| = \Big|\min_{t\in T} f(t) - \min_{t\in T} f_0(t)\Big| \le \|f - f_0\|_\infty.$$

Die Abbildung Φ ist also Lipschitz-stetig mit Konstante 1, also auch stetig.

Aufgabe P3 (Eine erste schwache Konvergenz).

Sei $0 \in T \subset \mathbb{R}$ kompakt. Wir betrachten im Folgenden den metrischen Raum $(C(T), \|\cdot\|_\infty)$. Für Zufallsvariablen $X_n, X : \Omega \to C(T)$ wurde in der Vorlesung gezeigt, dass $X_n \xrightarrow{D} X$ genau dann, wenn

(A) für alle $k \in \mathbb{N}$, $t_1, ..., t_k \in T$ gilt: $(X_n(t_1), ..., X_n(t_k)) \xrightarrow{D} (X(t_1), ..., X(t_k))$, und

(B) (X_n) stochastisch gleichgradig stetig ist.

Wir betrachten nun i.i.d. reellwertige Zufallsvariablen Z_i, $i \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{E}|Z_1| < \infty$ und den Prozess

$$X_n(t) := \sqrt{n} \cdot \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \cos(t \cdot Z_i) - \mathbb{E}\cos(t \cdot Z_1)\Big)$$

(i) Definieren Sie einen geeigneten Gauß-Prozess $(X(t))_{t\in T}$, so dass (A) erfüllt ist, und weisen Sie (A) nach.
Der multivariate Zentrale Grenzwertsatz in $\mathbb{R}^k$ darf vorausgesetzt werden.

(ii) Nehmen Sie nun an, dass (B) erfüllt ist, also $X_n \xrightarrow{D} X$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$\sup_{t\in T} X_n(t) \xrightarrow{D} \sup_{t\in T} X(t).$$

Lösung:

(i) Seien $k \in \mathbb{N}$, $t_1, ..., t_k \in T$. Da die Z_i i.i.d. sind, sind auch die Zufallsvektoren

$$\Big(\cos(t_1 Z_i), ..., \cos(t_k Z_i)\Big), \quad i \in \mathbb{N}$$

i.i.d.
Außerdem gilt für alle $j \in \{1, ..., k\}$: $\mathbb{E}[\cos(t_j Z_i)^2] \le \mathbb{E}[1^2] \le 1 < \infty$. Mit dem multivariaten zentralen Grenzwertsatz folgt

$$\begin{pmatrix} X_n(t_1) \\ \vdots \\ X_n(t_k) \end{pmatrix} = \sqrt{n} \cdot \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} \cos(t_1 Z_i) \\ \vdots \\ \cos(t_k Z_i) \end{pmatrix} - \mathbb{E}\begin{pmatrix} \cos(t_1 Z_1) \\ \vdots \\ \cos(t_k Z_1) \end{pmatrix}\Big) \xrightarrow{D} N(0, \Sigma)$$

mit $\Sigma_{jk} = \operatorname{Cov}(\cos(t_j Z_1), \cos(t_k Z_1))$.
Sei nun also $X = (X(t))_{t \in T}$ ein stetiger zentrierter Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion $\gamma(s,t) = \operatorname{Cov}(\cos(sZ_1), \cos(tZ_1))$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} X_n(t_1) \\ \vdots \\ X_n(t_k) \end{pmatrix} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix} X(t_1) \\ \vdots \\ X(t_k) \end{pmatrix},$$

das heißt, die endlichdimensionalen Verteilungen von X_n konvergieren gegen diejenigen von X. (A) ist gezeigt.

(ii) Da X_n, X stetig sind, gilt $\sup_{t\in T} X_n(t) = \max_{t \in T} X_n(t)$ und $\sup_{t \in T} X(t) = \max_{t\in T} X(t)$. Es wurde bereits in A2(c) gezeigt, dass $\Phi : C(T) \to \mathbb{R}, \Phi(f) = \max_{t\in T} f(t)$ ein stetiges Funktional ist. Mit dem CMT folgt

$$\sup_{t\in T} X_n(t) = \Phi(X_n) \xrightarrow{D} \Phi(X) = \sup_{t \in T} X(t).$$

Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`