Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
*Wahrscheinlichkeitstheorie 2*
Sommersemester 2023

# Präsenzblatt 2

**Aufgabe P1 (Schwache und stochastische Konvergenz).**
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(S, d)$ ein metrischer Raum ausgestattet mit der Borelschen Sigma-Algebra $\mathcal{B}(S)$. Seien $Y_n, X_n, X, Y : \Omega \to S$ messbare Abbildungen. Zeigen Sie:

(i) Wir betrachten die vereinfachte Version des Continuous mapping theorems (CMT): Ist $(S', d')$ ein weiterer metrischer Raum und $\Phi : S \to S'$ stetig, so gilt

$$X_n \xrightarrow{D} X \quad \Rightarrow \quad \Phi(X_n) \xrightarrow{D} \Phi(X).$$

Zeigen Sie die Aussage einmal direkt mit der Definition der schwachen Konvergenz und einmal mit Hilfe des Portmanteau-Lemmas (ii) (offene Mengen).

(ii) Gilt $X_n \xrightarrow{D} X$ und ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ eine konvergente Folge in $S$ mit $c_n \to c \in S$, so gilt

$$d(X_n, c_n) \xrightarrow{D} d(X, c).$$

*Hinweis: Reduzieren Sie die Aussage mit dem Lemma von Slutzky daraus, dass noch $d(X_n, c) \xrightarrow{D} d(X, c)$ zu zeigen ist. Wenden Sie dann das CMT an.*

(iii) Versieht man $S \times S$ mit der Produkt-Sigma-Algebra und der Produkt-Metrik

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2),$$

so gilt

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X, \quad Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y \quad \Rightarrow \quad (X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X, Y).$$

**Aufgabe P2 (Stetige Funktionale).**
Wir betrachten den metrischen Raum $(C(T), \|\cdot\|_\infty)$ mit $T \subset \mathbb{R}$ kompakt. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionale stetig sind. Hierbei wird $C(T)\times\mathbb{R}$ mit der Produktmetrik $d((f, x), (g, y)) = d(f, g) + |x - y|$ ausgestattet.

$$\begin{aligned}
(a) \quad \Phi : C(T) \to \mathbb{R}, \quad \Phi(f) &= \int |f(t)|dt \\
(b) \quad \Phi : C(T) \times T \to \mathbb{R}, \quad \Phi(f, x) &= f(x) \\
(c) \quad \Phi : C(T) \to \mathbb{R}, \quad \Phi(f) &= \min_{t\in T} g(t)
\end{aligned}$$

**Aufgabe P3 (Eine erste schwache Konvergenz).**

Sei $0 \in T \subset \mathbb{R}$ kompakt. Wir betrachten im Folgenden den metrischen Raum $(C(T), \|\cdot\|_\infty)$. Für Zufallsvariablen $X_n, X : \Omega \to C(T)$ wurde in der Vorlesung gezeigt, dass $X_n \xrightarrow{D} X$ genau dann, wenn

(A) für alle $k \in \mathbb{N}$, $t_1, ..., t_k \in T$ gilt: $(X_n(t_1), ..., X_n(t_k)) \xrightarrow{D} (X(t_1), ..., X(t_k))$, und

(B) $(X_n)$ stochastisch gleichgradig stetig ist.

Wir betrachten nun i.i.d. reellwertige Zufallsvariablen $Z_i$, $i \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{E}|Z_1| < \infty$ und den Prozess

$$X_n(t) := \sqrt{n} \cdot \Big(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \cos(t \cdot Z_i) - \mathbb{E}\cos(t \cdot Z_1)\Big)$$

(i) Definieren Sie einen geeigneten Gauß-Prozess $(X(t))_{t\in T}$, so dass (A) erfüllt ist, und weisen Sie (A) nach.
*Der multivariate Zentrale Grenzwertsatz in $\mathbb{R}^k$ darf vorausgesetzt werden.*

(ii) Nehmen Sie nun an, dass (B) erfüllt ist, also $X_n \xrightarrow{D} X$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$\sup_{t\in T} X_n(t) \xrightarrow{D} \sup_{t\in T} X(t).$$

**Vorlesungswebseite:**
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`