Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Präsenzblatt 1 - Lösungen

Aufgabe P4 (Brownsche Bewegung).
Es seien $(W_t)_{t\in[0,\infty)}, (W'_t)_{t\in[0,\infty)}$ zwei unabhängige Brownsche Bewegungen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$. Für $t \geq 0$ definiere

$$X_t := aW_t + bW'_t$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Brownschen Bewegung, dass $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ wieder eine Brownsche Bewegung ist.

(b) Sei $\alpha \in (0, \infty)$. Für $t \geq 0$ definiere

$$Y_t := \alpha \cdot W_{\frac{t}{\alpha^2}}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Charakterisierung von Brownschen Bewegungen als Gauß-Prozess, dass $(Y_t)_{t\in[0,\infty)}$ wieder eine Brownsche Bewegung ist.

Lösung:

(a) Zu zeigen sind (W1)-(W4).

(W1) Es ist, da W, W' laut Voraussetzung (W1) erfüllen,

$$X_0 = a \cdot W_0 + bW'_0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0.$$

(W2) Seien $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$. Da W, W' laut Voraussetzung (W2) erfüllen, sind die einzelnen Einträge in $(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})_{i=1,...,n}$ unabhängig und die einzelnen Einträge in $(W'_{t_i} - W'_{t_{i-1}})_{i=1,...,n}$ unabhängig. Da außerdem W, W' unabhängig, sind die Vektoren

$$(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})_{i=1,...,n}, \quad (W'_{t_i} - W'_{t_{i-1}})_{i=1,...,n}$$

unabhängig. Damit sind alle Zufallsvariablen

$$W_{t_i} - W_{t_{i-1}}, \quad W'_{t_i} - W'_{t_{i-1}}, \quad i = 1, ..., n$$

gemeinsam stochastisch unabhängig. Es folgt, dass auch

$$X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = a \cdot (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + b \cdot (W'_{t_i} - W'_{t_{i-1}})$$

als Funktionen unterschiedlicher, unabhängiger Zufallsvariablen unabhängig sind.

(W3) Sei $0 \leq s < t$. Da W, W' unabhängig sind, sind auch $W_t - W_s$ und $W'_t - W'_s$ unabhängig. Da W, W' Brownsche Bewegungen, gilt nach (W3): $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ und $W'_t - W'_s \sim N(0, t-s)$. Aufgrund der Faltungsregeln für unabhängige Normalverteilungen folgt

$$\begin{aligned} X_t - X_s &= a \cdot (W_t - W_s) + b \cdot (W'_t - W'_s) \\ &\sim N(a \cdot 0 + b \cdot 0, a^2 \cdot (t-s) + b^2 \cdot (t-s)) \\ &= N(0, (a^2+b^2)(t-s)) \overset{a^2+b^2=1}{=} N(0, t-s). \end{aligned}$$

(W4) Da W, W' Brownsche Bewegungen sind, sind $t \mapsto W_t$, $t \mapsto W'_t$ $\mathbb{P}$-f.s. stetig. Es gibt also Nullmengen $N, N' \in \mathcal{A}$ mit

$$\forall \omega \in N^c \cap (N')^c : t \mapsto W_t(\omega), \quad t \mapsto W'_t(\omega)$$

stetig. Damit gilt für die Nullmenge $M := N \cup N' \in \mathcal{A}$: Für alle $\omega \in M$ ist

$$t \mapsto aW_t(\omega) + bW'_t(\omega) = X_t(\omega)$$

stetig als Komposition stetiger Funktionen.
Also ist $t \mapsto X_t(\omega)$ $\mathbb{P}$-f.s. stetig.

(b) Zu zeigen ist (W123) und (W4).

(W123) Seien $0 \leq t_1 < ... < t_n$. Da W eine Brownsche Bewegung ist und (W123) erfüllt, gilt

$$\begin{pmatrix} W_{t_1/\alpha^2} \\ \vdots \\ W_{t_n/\alpha^2} \end{pmatrix} \sim N(0, \Sigma)$$

mit geeigneter Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Es folgt

$$\begin{pmatrix} Y_{t_1} \\ \vdots \\ Y_{t_n} \end{pmatrix} = (\alpha I_{n \times n}) \cdot \begin{pmatrix} W_{t_1/\alpha^2} \\ \vdots \\ W_{t_n/\alpha^2} \end{pmatrix} \sim N(0, \alpha^2 \Sigma),$$

das heißt, die endlichdimensionalen Verteilungen von $(Y_t)_{t \geq 0}$ sind multivariate Normalverteilungen mit Mittelwert 0. Damit ist die Mittelwertfunktion von $(Y_t)_{t \geq 0}$ die Nullfunktion.
Es ist nun gezeigt, dass $(Y_t)_{t \geq 0}$ zentrierter Gauß-Prozess ist. Berechne die Kovarianzfunktion: Für $s, t \geq 0$ ist

$$\mathrm{Cov}(Y_s, Y_t) = \mathrm{Cov}(\alpha W_{s/\alpha^2}, \alpha W_{t/\alpha^2}) = \alpha^2 \mathrm{Cov}(W_{s/\alpha^2}, W_{t/\alpha^2}) = \alpha^2 \cdot \min\{s/\alpha^2, t/\alpha^2\} = \min\{s, t\}.$$

- Da W Brownsche Bewegung ist, ist $t \mapsto W_t$ $\mathbb{P}$-f.s. stetig. Die Funktionen $g(x) = \alpha x$, $h(x) = x/\alpha^2$ sind ebenfalls stetig. Damit ist

$$t \mapsto Y_t = g(W_{h(t)})$$

ebenfalls $\mathbb{P}$-f.s. stetig als Komposition stetiger Funktionen.

Aufgabe P5 (Eigenschaften der Brownschen Bewegung).

Sei $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Nehmen Sie an, dass $t \mapsto W_t$ stetig ist (ohne $\mathbb{P}$-f.s.). Definiere

$$\begin{aligned} A \quad &:= \quad \{\omega \in \Omega : \text{Auf allen Intervallen } [0, M] \text{ mit } M \in \mathbb{R}_{>0} \text{ ist } t \mapsto W_t(\omega) \\ &\qquad \text{nicht Lipschitz-stetig mit Konstante } L > 0\}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $A = A'$ mit

$$\begin{aligned} A' \quad &= \quad \{\omega \in \Omega : \text{Auf allen Intervallen } [0, M] \text{ mit } M \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ ist } t \mapsto W_t(\omega) \\ &\qquad \text{nicht Lipschitz-stetig mit Konstante } L \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty).\} \end{aligned}$$

(b) Betrachten Sie für festes $M, L > 0$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$R_{M,L,n} := \{\omega \in \Omega : \forall i \in \{1, ..., n\} : |W_{i\cdot\frac{M}{n}}(\omega) - W_{(i-1)\cdot\frac{M}{n}}(\omega)| \leq \frac{LM}{n}\}.$$

Zeigen Sie $\mathbb{P}(R_{M,L,n}) \to 0$ $(n \to \infty)$.

(c) Setzen Sie A' in Beziehung mit $R_{M,L,n}$ und folgern Sie $\mathbb{P}(A) = 1$.

Lösung:

(a) Formalisierung der Mengen:

$$\begin{aligned} A \quad &= \quad \{\omega \in \Omega : \forall M > 0 : \forall L > 0 \exists s, t \in [0, M] : |W_t(\omega) - W_s(\omega)| > L|t - s|\}, \\ A' \quad &= \quad \{\omega \in \Omega : \forall M \in \mathbb{Q}_{>0} : \forall L \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty) \exists s, t \in [0, M] : |W_t(\omega) - W_s(\omega)| > L|t - s|\}. \end{aligned}$$

Nun gilt $A \subset A'$, denn:

- '$\subset$': ('offensichtlich') Sei $\omega \in A$.
  Sei $M \in \mathbb{Q}_{>0}$, $L \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ beliebig. Da $\omega \in A$, gibt es $s, t \in [0, M]$ mit $|W_t(\omega) - W_s(\omega)| > L|t - s|$. Damit ist $\omega \in A'$.
- '$\supset$': Sei $\omega \in A'$.
  Sei $M > 0$, $L > 0$ beliebig. Wähle $0 < M' \leq M$, $L \leq L'$ mit $M', L' \in \mathbb{Q}$. Da $\omega \in A'$, gibt es $s, t \in [0, M']$ mit $|W_t(\omega) - W_s(\omega)| > L'|t - s|$. Dann ist auch $s, t \in [0, M]$ und es gilt $|W_t(\omega) - W_s(\omega)| > L'|t - s| \geq L|t - s|$. Damit ist $\omega \in A$.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_{M,L,n}) &= \mathbb{P}\Big(\forall i \in \{1,...,n\} : |W_{i\cdot\frac{M}{n}} - W_{(i-1)\cdot\frac{M}{n}}| \le \frac{LM}{n}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{|W_{i\cdot\frac{M}{n}} - W_{(i-1)\cdot\frac{M}{n}}| \le \frac{LM}{n}\}\Big) \\
&\overset{i=1}{\le} \mathbb{P}\Big(|W_{\frac{M}{n}} - W_0| \le \frac{LM}{n}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(|\underbrace{\frac{W_{\frac{M}{n}} - W_0}{\sqrt{M/n}}}_{\sim N(0,1)}| \le L\sqrt{\frac{M}{n}}\Big) \\
&= \Phi\Big(L\sqrt{\frac{M}{n}}\Big) - \Phi\Big(-L\sqrt{\frac{M}{n}}\Big) \\
&= 2\Phi\Big(\underbrace{L\sqrt{\frac{M}{n}}}_{\to 0}\Big) - 1 \\
&\to 2\underbrace{\Phi(0)}_{=\frac{1}{2}} - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Hierbei ist Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $N(0,1)$.

(c) Es ist

$$\begin{aligned}
(A')^c &= \{\omega \in \Omega : \exists M \in \mathbb{Q}_{>0} : \exists L \in \mathbb{Q} \cap (0,\infty) \forall s,t \in [0,M] : |W_t(\omega) - W_s(\omega)| \le L|t-s|\} \\
&= \bigcup_{M \in \mathbb{Q}_{>0}} \bigcup_{L \in \mathbb{Q}_{>0}} \big\{\omega \in \Omega : \forall s,t \in [0,M] : |W_t(\omega) - W_s(\omega)| \le L|t-s|\big\}.
\end{aligned}$$

Nun gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$R_{M,L} := \big\{\omega \in \Omega : \forall s,t \in [0,M] : |W_t(\omega) - W_s(\omega)| \le L|t-s|\big\} \subset R_{M,L,n}.$$

Es folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(R_{M,L}) \le \mathbb{P}(R_{M,L,n}) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Damit ist

$$\mathbb{P}((A')^c) \le \sum_{M \in \mathbb{Q}_{>0}} \sum_{L \in \mathbb{Q}_{>0}} \underbrace{\mathbb{P}(R_{M,L})}_{=0} = 0.$$

Also $\mathbb{P}(A') = 1$.

Aufgabe P6 (Separabilität).

In dieser Aufgabe werden zwei Räume betrachtet und auf Separabilität untersucht.

(a) Sei

$$\ell^0(\mathbb{R}) := \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } 0\},$$

und $\|a\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Zeigen Sie, dass $(\ell^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ separabel ist.

(b) Sei

$$D[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \forall x_0 \in \mathbb{R} : \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0), \lim_{x \uparrow x_0} f(x) \text{ existiert und ist endlich}\}$$

der Raum der rechtsseitig stetigen Funktionen mit existierenden linksseitigen Grenzwerten. Zeigen Sie, dass $(D[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ nicht separabel ist.
Hinweis: Betrachten Sie $f_a(x) := \mathbb{1}_{[0,a)}(x)$.

Lösung:

(a) Definiere den Raum der abbrechenden Folgen

$$\begin{aligned} A &:= \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} : b_n \in \mathbb{Q} \text{ for } 1 \leq n \leq m, b_n = 0 \text{ for } n > m\} \\ &= \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}^m \times \{(0)_{n\in\mathbb{N}}\} \end{aligned}$$

Dieser ist abzählbar als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen. Offensichtlich besteht A aus Folgen, die gegen 0 konvergieren, da sie ab einem festen Index konstante 0 werden.
Daher gilt $A \subset \ell^0(\mathbb{R})$.
Wir zeigen nun, dass A dicht in $(\ell^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ liegt (das ist eine mögliche Definition der Separabilität).
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^0(\mathbb{R})$. Sei $\varepsilon > 0$.
Da $a_n \to 0$, gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \ > N : \quad |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gibt es für jedes $1 \leq n \leq N$ ein $b_n \in \mathbb{Q}$ mit

$$|a_n - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definiere nun $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ durch $b_n = 0$ für $n > N$. Dann gilt

$$|a_n - b_n| \begin{cases} \leq \frac{\varepsilon}{2}, & n = 1, ..., N, \\ \leq |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}, & n > N \end{cases} \quad \leq \quad \frac{\varepsilon}{2},$$

also

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Damit ist mit A eine abzählbar dichte Teilmenge gefunden.

(b) Angenommen, es gäbe eine abzählbar dichte Teilmenge $A \subset D[0,1]$ von $(D[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.
Für $x \in [0,1]$ betrachte die Funktionen $f_x : [0,1] \to \mathbb{R}, f_x(y) = \mathbb{1}_{[0,x)}(y)$.
Offensichtlich ist f_x rechtsseitig stetig mit linksseitig existierenden Grenzwerten, also $f_x \in D[0,1]$. Außerdem gilt für $x, y \in [0,1]$:

$$x < y \quad \Rightarrow \quad f_x(x) = 0, f_y(x) = 1.$$

Also ist

$$\|f_x - f_y\|_\infty = 1.$$

Da A dicht in $(D[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ liegt (Widerspruchsannahme), gibt es für jedes $x \in [0,1]$ ein $a_x \in A$ mit

$$\|f_x - a_x\|_\infty < \frac{1}{4}.$$

Damit folgt für alle $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$:

$$\begin{aligned} & 1 = \|f_x - f_y\|_\infty \leq \|f_x - a_x\|_\infty + \|a_x - a_y\|_\infty + \|a_y - f_y\|_\infty \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} < 1 - \|f_x - a_x\|_\infty - \|a_y - f_y\|_\infty \leq \|a_x - a_y\|_\infty, \end{aligned}$$

also $a_x \neq a_y$. Das heißt, alle $a_x, x \in [0,1]$ sind verschieden! Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass A abzählbar ist, denn

$$\{a_x : x \in [0,1]\} \subset A$$

is überabzählbar.

Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`