Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Präsenzblatt 11

Aufgabe P1 (Anwendungen der Ito-Formel, Teil 1).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $W = (W_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Version der Brownschen Bewegung.
In dieser Aufgabe wollen wir der Einfachheit halber annehmen, dass $W \in \mathcal{M}_2$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$X_t = e^{\frac{u}{2}} \cos(W_u), \qquad Y_t = W_t^4 - 6tW_t^2 + 3t^2, \qquad Z_t = W_t^3 - 3tW_t$$

Martingale sind, indem Sie die Prozesse zunächst mit der Ito-Formel in Standardform $(x + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s)$ schreiben.

(b) Berechnen Sie

$$\langle Z \rangle_t, \qquad \langle Y, Z \rangle_t.$$

Aufgabe P2 (Anwendungen der Ito-Formel, Teil 2).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $W = (W_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Version der Brownschen Bewegung.

(a) Zeigen Sie, dass $X_t = e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$ die SDGL $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$, $X_0 = 1$ löst.

(b) Gegeben sei die stochastische Differentialgleichung (SDGL)

$$dX_t = -e^{-4X_t} dt + e^{-2X_t} dW_t, \qquad X_0 = 1.$$

Ermitteln Sie eine explizite Darstellung von X_t, das heißt, lösen Sie die SDGL.
Hinweis: Definieren Sie $Y_t = e^{2X_t}$ und berechnen Sie mittels der Ito-Formel dY_t.

(c) Gegeben sei nun die stochastische Differentialgleichung (SDGL)

$$dX_t = -\frac{X_t}{1+t} \cdot dt + \frac{1}{1+t} dW_t, \qquad X_0 = 0,$$

Ermitteln Sie eine explizite Darstellung von X_t, das heißt, lösen Sie die SDGL.
Hinweis: Nutzen Sie den Ansatz $X_t = p(t) \cdot W_t$ mit einer nur von t abhängigen, differenzierbaren Funktion p. Berechnen Sie damit dX_t und führen Sie einen Koeffizientenvergleich von dt, dW_t durch.

Aufgabe P3 (Das stochastische Exponential).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges Semimartingal. Es sei $\mathcal{E}(X) = \exp(X - X_0 - \frac{1}{2}\langle X\rangle)$ das stochastische Exponential von X.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}(X)$ erfüllt:

$$d\mathcal{E}(X)_t = \mathcal{E}(X)_t dX_t, \qquad \mathcal{E}(X)_0 = 1.$$

Folgern Sie: $\mathcal{E}(X)$ ist ein stetiges Semimartingal.

(b) Nehmen Sie nun an, dass X ein lokales Martingal ist. Folgern Sie, dass auch $\mathcal{E}(X)$ ein lokales Martingal ist.

(c) Es sei X ein lokales Martingal und es gelte die (abgeschwächte) Novikov-Bedingung: Für ein $p > 1$ und ein $T > 0$ gilt

$$\mathbb{E} \exp\big(\frac{p}{2}\langle X\rangle_T\big) < \infty.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{E}(X)_t)_{t\in[0,T]}$ dann ein Martingal ist.
Hinweis: Gilt für Zufallsvariablen $Z_n, Z : \Omega \to \mathbb{R}$, dass $Z_n \to Z$ f.s. und ist $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar, so folgt $Z_n \to Z$ in L^1.

Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`