Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Präsenzblatt 10 - Lösungen

Aufgabe P1 (Regeln für quadratische Variation).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X = (X_t)_{t\geq 0}, Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ zwei stetige stochastische Prozesse mit quadratischen Variationsprozessen $\langle X\rangle$, $\langle Y\rangle$. Zeigen Sie:

(a) Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so gilt für alle $t \geq 0$:
$$\langle \alpha X\rangle_t = \alpha^2 \langle X\rangle_t.$$

(b) Sind $X, Y \in \mathcal{M}_2$ unabhängig und adaptiert bzgl. der gleichen Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, so gilt für alle $t \geq 0$:
$$\langle X + Y\rangle_t = \langle X\rangle_t + \langle Y\rangle_t.$$

Lösung:

(a) Sei $t \geq 0$. Sei $0 = t_0^n < ... < t_n^n = t$ eine Folge von Zerlegungen von $[0, t]$ mit $\Delta_n = \sup_{i=0,...,n-1} |t_{i+1}^n - t_i^n| \to 0$ $(n \to \infty)$. Schreibe im Folgenden kurz $t_i = t_i^n$. Es gilt
$$\sum_{i=0}^{n-1}((\alpha X)_{t_{i+1}} - (\alpha X)_{t_i})^2 = \alpha^2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \alpha^2\langle X\rangle_t,$$
da X quadratische Variation $\langle X\rangle$ besitzt.
Alternative, wenn $X \in \mathcal{M}_2$: Zeige, dass $\alpha^2\langle X\rangle$ die Charakterisierung des Prozesses $\langle \alpha X\rangle$ erfüllt. Offensichtlich ist auch $t \mapsto \alpha^2\langle X\rangle_t$ monoton wachsend, stetig, adaptiert, $\alpha^2\langle X\rangle_0 = 0$ und $(\alpha X)_t^2 - (\alpha^2\langle X\rangle_t) = \alpha^2 \cdot (X_t^2 - \langle X\rangle_t)$ ist ein Martingal.

(b) Wir zeigen, dass $Z := \langle X\rangle + \langle Y\rangle$ die Charakterisierung des quadratischen Variationsprozesses $\langle X + Y\rangle$ erfüllt:

- Es ist $Z_0 = \langle X\rangle_0 + \langle Y\rangle_0 = 0 + 0 = 0$.
- Es ist $t \mapsto Z_t = \langle X\rangle_t + \langle Y\rangle_t$ monoton wachsend und stetig, da $\langle X\rangle, \langle Y\rangle$ monoton wachsend und stetig sind.
- Für alle $t \geq 0$ ist $Z_t = \langle X\rangle_t + \langle Y\rangle_t \in \mathcal{F}_t$, da die Summe messbarer Funktionen messbar ist.
- Es gilt
$$(X + Y)_t^2 - Z_t = (X_t^2 - \langle X\rangle_t) + (Y_t^2 - \langle Y\rangle_t) + 2X_tY_t.$$
Da $X, Y \in \mathcal{M}_2$, sind $(X_t^2 - \langle X\rangle_t), (Y_t^2 - \langle Y\rangle_t)$ $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingale. Außerdem gilt für $t \geq 0$: $X_t, Y_t \in \mathcal{F}_t$ (damit $2X_tY_t \in \mathcal{F}_t$),
$$\mathbb{E}[|2X_tY_t|] \leq 2\mathbb{E}[X_t^2]^{1/2}\mathbb{E}[Y_t^2]^{1/2} < \infty$$

da $X, Y \in \mathcal{M}_2$, und für $0 \le s \le t$: Es sei $\mathcal{F}_s^X := \sigma(X_u : 0 \le u \le s)$ die kanonische Filtration von X. Dann ist mit iterierter Erwartung

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[2X_tY_t|\mathcal{F}_s] &= 2\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_tY_t|\sigma(\mathcal{F}_s \cup \mathcal{F}_t^X)]|\mathcal{F}_s] \\
&= 2\mathbb{E}[X_t\mathbb{E}[Y_t|\sigma(\mathcal{F}_s \cup \mathcal{F}_t^X)]|\mathcal{F}_s] \\
&\overset{X,Y \text{ unabh.}}{=} 2\mathbb{E}[X_t\mathbb{E}[Y_t|\mathcal{F}_s]|\mathcal{F}_s] \\
&\overset{Y\in\mathcal{M}_2}{=} 2\mathbb{E}[X_tY_s|\mathcal{F}_s] \\
&= 2Y_s\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \\
&\overset{X\in\mathcal{M}_2}{=} 2Y_sX_s.
\end{aligned}$$

Aufgabe P2 (Stetige lokale Martingale mit beschränkter Variation).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $W = (W_t)_{t\ge 0}$ eine stetige Version der Brownschen Bewegung.
In dieser Aufgabe wollen wir der Einfachheit halber annehmen, dass $W \in \mathcal{M}_2$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition des stochastischen Integrals, dass gilt:

$$\forall t \ge 0: \qquad \int_0^t s^2 \cdot dW_s = t^2W_t - \int_0^t 2sW_s ds \quad f.s.$$

Hinweis: Stellen Sie das stochastische Integral als Limes von stochastischen Integralen einfacher Funktionen dar, beispielsweise basierend auf der Zerlegungsfolge $t_k = \frac{k}{n} \cdot t$ ($k = 0, ..., n$) und $g_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k^2 \cdot \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(s)$. Es gilt $\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}^2 W_{t_{k+1}} - t_k^2 W_{t_k}) = t^2W_t$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{t}\int_0^t 2W_s dW_s + 1 \sim \chi_1^2$$

Chi-Quadrat-verteilt ist mit einem Freiheitsgrad.
Anmerkung: Insbesondere ist nicht jedes stochastische Integral bzgl. einer Brownschen Bewegung automatisch normalverteilt! Es kommt immer auch auf den Integranden an.

Lösung:

(a) Sei $t \ge 0$ und $t_k = \frac{k}{n} \cdot t$ ($k = 0, ..., n$). Definiere für $n \in \mathbb{N}$:

$$g_n : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad g_n(s) := \sum_{k=0}^{n-1} t_k^2 \cdot \mathbb{1}_{(t_k, t_{t+1}]}(s).$$

Dann ist g_n eine einfache Funktion, denn $|t_k^2| = (\frac{k}{n})^2 \cdot t^2 \le t^2$ für alle $k \in \{0, ..., n\}$. Es ist außerdem

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^t (g_n(s)-s^2)^2 d\langle W\rangle_s &= \int_0^t (g_n(s)-s^2)^2 ds \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \underbrace{(t_k^2-s^2)^2}_{=(s-t_k)\cdot(s+t_k)\leq(s-t_k)\cdot 2t_{k+1}} ds \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}(2t_{k+1})^2\cdot \underbrace{\int_{t_k}^{t_{k+1}}(s-t_k)^2 ds}_{=\frac{1}{3}(t_{k+1}-t_k)^3} \\
&\leq \frac{4}{3}t^2\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)^3 = \frac{4}{3}t^5\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^3} = \frac{4}{3n^2}t^5 \to 0.
\end{aligned}$$

Damit folgt, dass

$$\int_0^t s^2 dW_s = L^2 - \lim_{n\to\infty}\int_0^t g_n(s)dW_s.$$

Hier ist

$$\begin{aligned}
\int_0^t g_n(s)dW_s &= \sum_{k=0}^{n-1} t_k^2(W_{t_{k+1}}-W_{t_k}) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(t_{k+1}^2W_{t_{k+1}}-t_k^2W_{t_k}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}^2-t_k^2)W_{t_{k+1}} \\
&= t^2W_t - 2\sum_{k=0}^{n-1}t_{k+1}W_{t_{k+1}}\cdot(t_{k+1}-t_k)+R_n,
\end{aligned}$$

mit

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)^2 W_{t_{k+1}}.$$

Es gilt

$$\mathbb{E}|R_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{(t_{k+1}-t_k)^2}_{=\frac{t^2}{n^2}} \underbrace{\mathbb{E}|W_{t_{k+1}}|}_{\leq\mathbb{E}[W_{t_{k+1}}^2]^{1/2}\leq t_{k+1}^{1/2}\leq t^{1/2}} \leq \frac{t^{5/2}}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} = t^{5/2}\cdot n^{-1}\to 0.$$

Damit gilt $R_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Mit der Theorie über Riemann-Integrale folgt $\sum_{k=0}^{n-1} t_{k+1}W_{t_{k+1}}\cdot(t_{k+1}-t_k)\to\int_0^t sW_s ds$. Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned}
&\int_0^t g_n(s)dW_s \\
= \;& t^2W_t - 2\sum_{k=0}^{n-1}t_{k+1}W_{t_{k+1}}\cdot(t_{k+1}-t_k)+R_n \xrightarrow{\mathbb{P}} t^2W_t - 2\int_0^t sW_s ds + 0.
\end{aligned}$$

Aufgrund der f.s. Eindeutigkeit des stochastischen bzw. L^2-Limes folgt

$$\int_0^t s^2 dW_s = t^2W_t - 2\int_0^t sW_s ds.$$

(a) Es ist bereits bekannt, dass für $t \geq 0$ gilt:

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{t}{2}.$$

Damit folgt

$$\frac{1}{t} \int_0^t 2 W_s dW_s + 1 = \frac{1}{t} W_t^2 - 1 + 1 = (\frac{W_t}{\sqrt{t}})^2.$$

Da $W_t \sim N(0,t)$ folgt $\frac{W_t}{\sqrt{t}} \sim N(0,1)$. Damit ist $\frac{1}{t} \int_0^t 2W_s dW_s + 1 \sim \chi_1^2$.

Aufgabe P3 (Erhaltungseigenschaften des Ito-Integrals).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(W_t)_{t \geq 0}$ eine stetige Version der Brownschen Bewegung mit kanonischer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, welche die üblichen Annahmen erfüllt. Zeigen Sie:

(a) Der Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ mit $X_t = \int_0^t W_s^2 dW_s$ ist ein $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$-Martingal.
Hinweis: Nutzen Sie, dass stochastische Integrale in $\mathcal{M}_2$ liegen, wenn der Integrator in $\mathcal{M}_2$ liegt und der Integrand im zugehörigen $\mathcal{L}^*$.

(b) Der Prozess $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ mit $Y_t = \int_0^t e^{e^{W_s}} dW_s$ ist ein lokales Martingal.
Hinweis: Nutzen Sie, dass stochastische Martingale in $\mathcal{M}$ liegen, wenn der Integrator in $\mathcal{M}$ liegt und der Integrand im zugehörigen $\mathcal{P}^*$.

(c) Der Prozess $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ mit $Z_t = \int_0^t W_s^2 d(W_s + s^2)$ ist ein Semimartingal.

Lösung:

(a) Definiere $g(s) := W_s^2$. Dann gilt $g \in \mathcal{L}^*$, denn:

- $s \mapsto g(s) = W_s^2$ ist stetig, und für alle $s \geq 0$ ist $g(s) = W_s^2$ $\mathcal{F}_s$-messbar. Damit ist g progressiv messbar.
- Es gilt für alle $t \geq 0$:

$$\mathbb{E} \int_0^t g(s)^2 d\langle W \rangle_s = \mathbb{E} \int_0^t W_s^4 ds = \int_0^t \mathbb{E}[W_s^4] ds = \int_0^t 3s^2 ds = s^3 \Big|_0^t = t^3 < \infty.$$

Laut Voraussetzung darf $W \in \mathcal{M}_2$ angenommen werden. Damit ist $(\int_0^t W_s^2 dW_s)_{t \geq 0} = (\int_0^t g(s) dW_s)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2$, also insbesondere ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

(b) Definiere $g(s) := e^{e^{W_s}}$. Dann gilt $g \in \mathcal{P}^*$, denn:

- $s \mapsto g(s) = e^{e^{W_s}}$ ist stetig, und für alle $s \geq 0$ ist $g(s) = e^{e^{W_s}}$ $\mathcal{F}_s$-messbar. Damit ist g progressiv messbar.
- Es gilt für alle $t \geq 0$:

$$\int_0^t g(s)^2 d\langle W \rangle_s = \int_0^t e^{2e^{W_s}} ds < \infty \quad f.s.,$$

denn es wird eine stetige Funktion über ein kompaktes Intervall $[0, t]$ integriert.

Damit ist $g \in \mathcal{P}^*$.
Außerdem ist $(W_t)_{t\geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingal und damit insbesondere ein lokales $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingal (d.h. $W \in \mathcal{M}$). Es folgt, dass $(\int_0^t e^{e^{W_s}} dW_s)_{t\geq 0} = (\int_0^t g(s) dW_s)_{t\geq 0} \in \mathcal{M}$. Insbesondere ist es ein lokales Martingal.

(c) Es gilt für $t \geq 0$:

$$Z_t = \int_0^t W_s^2 d(W_s + s^2) \overset{\text{Def.}}{=} \underbrace{\int_0^t W_s^2 dW_s}_{=:M_t} + \underbrace{\int_0^t W_s^2 d(s^2)}_{=\int_0^t W_s^2 2s ds =: B_t}$$

Es ist M laut (a) ein Martingal, also insbesondere ein lokales Martingal. Der Prozess B hat beschränkte Variation als Riemann-Integral über eine stetige Funktion. Damit ist eine Darstellung von Z als Semimartingal gefunden.

Aufgabe P4 (Anwendung der Ito-Formel / Ito-Isometrie).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(W_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Version der Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass die folgenden zwei Prozesse Semimartingale sind, indem Sie die Ito-Formel für eine alternative Darstellung nutzen:

$$W_t^4 = ..., \qquad e^{e^{W_t}} = ...$$

Zeigen Sie außerdem: Für $t \geq 0$ gilt

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t W_s^2 dW_s\Big)^2\Big] = t^3.$$

Hinweis: $\mathbb{E}[Z^4] = 3$ *für* $Z \sim N(0,1)$.
Lösung:

(i) • Die Ito-Formel wird angewandt auf $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4$ (zweimal stetig differenzierbar):

$$\begin{aligned} W_t^4 &= f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t \partial_x f(W_s) dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x^2 f(W_s) d\langle W\rangle_s \\ &= f(0) + \int_0^t 4W_s^3 dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t 12 W_s^2 ds \\ &= \int_0^t 4W_s^3 dW_s + \int_0^t 6W_s^2 ds. \end{aligned}$$

Der erste Summand ist ein lokales Martingal, denn $W \in \mathcal{M}_2$ (nutze 'Vereinfachung' aus Aufgabe P3, dass $W \in \mathcal{M}_2$) und $(4W^3) \in \mathcal{P}^*$, da stetige Funktion und adaptiert (also progressiv messbar), und für alle $t \geq 0$: $\int_0^t (4W_s^3)^2 d\langle W\rangle_s = \int_0^t (4W_s^3)^2 ds < \infty$ f.s. als Integral einer stetigen Funktion über ein kompaktes Intervall. Der zweite Summand hat beschränkte Variation als Riemann-Integral über eine stetige Funktion.
Damit ist die obige Darstellung von W^4 die Darstellung eines Semimartingals.

- Die Ito-Formel wird angewandt auf $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{e^x}$ (zweimal stetig differenzierbar):

$$\begin{aligned} e^{e^{W_t}} &= f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t \partial_x f(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_x^2 f(W_s) d\langle W \rangle_s \\ &= f(0) + \int_0^t e^{e^{W_s}} e^{W_s} dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t (e^{e^{W_s}} e^{2W_s} + e^{e^{W_s}} e^{W_s}) ds \\ &= \int_0^t e^{e^{W_s}} e^{W_s} dW_s + \int_0^t e^{e^{W_s}} (e^{2W_s} + e^{W_s}) ds. \end{aligned}$$

Der erste Summand ist ein lokales Martingal, denn $W \in \mathcal{M}_2$ (nutze 'Vereinfachung' aus Aufgabe P3, dass $W \in \mathcal{M}_2$) und $(e^{e^W} e^W) \in \mathcal{P}^*$, da stetige Funktion und adaptiert (also progressiv messbar), und für alle $t \geq 0$: $\int_0^t e^{e^{W_s}} e^{W_s} d\langle W \rangle_s = \int_0^t e^{e^{W_s}} e^{W_s} ds < \infty$ f.s. als Integral einer stetigen Funktion über ein kompaktes Intervall. Der zweite Summand hat beschränkte Variation als Riemann-Integral über eine stetige Funktion.
Damit ist die obige Darstellung von e^{e^W} die Darstellung eines Semimartingals.

(ii) Nutze die Ito-Isometrie: Es gilt

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t W_s^2 dW_s\Big)^2\Big] = \mathbb{E} \int_0^t (W_s^2)^2 d\langle W \rangle_s = \mathbb{E} \int_0^t W_s^4 ds = \int_0^t \underbrace{\mathbb{E}[W_s^4]}_{=3s^2} ds = \int_0^t 3s^2 ds = s^3 \Big|_0^t = t^3.$$

Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`