Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Präsenzblatt 10

Aufgabe P1 (Regeln für quadratische Variation).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X = (X_t)_{t\geq 0}, Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ zwei stetige stochastische Prozesse mit quadratischen Variationsprozessen $\langle X \rangle$, $\langle Y \rangle$. Zeigen Sie:

(a) Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so gilt für alle $t \geq 0$:
$$\langle \alpha X \rangle_t = \alpha^2 \langle X \rangle_t.$$

(b) Sind $X, Y \in \mathcal{M}_2$ unabhängig und adaptiert bzgl. der gleichen Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, so gilt für alle $t \geq 0$:
$$\langle X + Y \rangle_t = \langle X \rangle_t + \langle Y \rangle_t.$$

Aufgabe P2 (Stetige lokale Martingale mit beschränkter Variation).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $W = (W_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Version der Brownschen Bewegung.
In dieser Aufgabe wollen wir der Einfachheit halber annehmen, dass $W \in \mathcal{M}_2$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition des stochastischen Integrals, dass gilt:
$$\forall t \geq 0: \qquad \int_0^t s^2 \cdot dW_s = t^2 W_t - \int_0^t 2sW_s ds \quad f.s.$$

Hinweis: Stellen Sie das stochastische Integral als Limes von stochastischen Integralen einfacher Funktionen dar, beispielsweise basierend auf der Zerlegungsfolge $t_k = \frac{k}{n} \cdot t$ ($k = 0, ..., n$) und $g_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k^2 \cdot \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(s)$. Es gilt $\sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1}^2 W_{t_{k+1}} - t_k^2 W_{t_k}) = t^2 W_t$.

(b) Zeigen Sie, dass
$$\frac{1}{t} \int_0^t 2W_s dW_s + 1 \sim \chi_1^2$$
Chi-Quadrat-verteilt ist mit einem Freiheitsgrad.
Anmerkung: Insbesondere ist nicht jedes stochastische Integral bzgl. einer Brownschen Bewegung automatisch normalverteilt! Es kommt immer auch auf den Integranden an.

Aufgabe P3 (Erhaltungseigenschaften des Ito-Integrals).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(W_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Version der Brownschen Bewegung mit kanonischer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, welche die üblichen Annahmen erfüllt. Zeigen Sie:

(a) Der Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ mit $X_t = \int_0^t W_s^2 dW_s$ ist ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingal.
Hinweis: Nutzen Sie, dass stochastische Integrale in $\mathcal{M}_2$ liegen, wenn der Integrator in $\mathcal{M}_2$ liegt und der Integrand im zugehörigen $\mathcal{L}^*$.

(b) Der Prozess $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ mit $Y_t = \int_0^t e^{e^{W_s}} dW_s$ ist ein lokales Martingal.
Hinweis: Nutzen Sie, dass stochastische Martingale in $\mathcal{M}$ liegen, wenn der Integrator in $\mathcal{M}$ liegt und der Integrand im zugehörigen $\mathcal{P}^*$.

(c) Der Prozess $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ mit $Z_t = \int_0^t W_s^2 d(W_s + s^2)$ ist ein Semimartingal.

Aufgabe P4 (Anwendung der Ito-Formel / Ito-Isometrie).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(W_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Version der Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass die folgenden zwei Prozesse Semimartingale sind, indem Sie die Ito-Formel für eine alternative Darstellung nutzen:

$$W_t^4 = ..., \qquad e^{e^{W_t}} = ...$$

Zeigen Sie außerdem: Für $t \geq 0$ gilt

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t W_s^2 dW_s\Big)^2\Big] = t^3.$$

Hinweis: $\mathbb{E}[Z^4] = 3$ *für* $Z \sim N(0,1)$.

Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`