Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Präsenzblatt 1

Aufgabe P4 (Brownsche Bewegung).

Es seien $(W_t)_{t\in[0,\infty)}, (W'_t)_{t\in[0,\infty)}$ zwei unabhängige Brownsche Bewegungen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$. Für $t \geq 0$ definiere

$$X_t := aW_t + bW'_t$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Brownschen Bewegung, dass $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ wieder eine Brownsche Bewegung ist.

(b) Sei $\alpha \in (0, \infty)$. Für $t \geq 0$ definiere

$$Y_t := \alpha \cdot W_{\frac{t}{\alpha^2}}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Charakterisierung von Brownschen Bewegungen als Gauß-Prozess, dass $(Y_t)_{t\in[0,\infty)}$ wieder eine Brownsche Bewegung ist.

Aufgabe P5 (Eigenschaften der Brownschen Bewegung).

Sei $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Nehmen Sie an, dass $t \mapsto W_t$ stetig ist (ohne $\mathbb{P}$-f.s.). Definiere

$$\begin{aligned} A \;:=\; \{\omega \in \Omega : & \text{ Auf allen Intervallen } [0, M] \text{ mit } M \in \mathbb{R}_{>0} \text{ ist } t \mapsto W_t(\omega) \\ & \text{ nicht Lipschitz-stetig mit Konstante } L > 0\}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $A = A'$ mit

$$\begin{aligned} A' \;=\; \{\omega \in \Omega : & \text{ Auf allen Intervallen } [0, M] \text{ mit } M \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ ist } t \mapsto W_t(\omega) \\ & \text{ nicht Lipschitz-stetig mit Konstante } L \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty).\} \end{aligned}$$

(b) Betrachten Sie für festes $M, L > 0$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$R_{M,L,n} := \{\omega \in \Omega : \forall i \in \{1, ..., n\} : |W_{i\cdot\frac{M}{n}}(\omega) - W_{(i-1)\cdot\frac{M}{n}}(\omega)| \leq \frac{LM}{n}\}.$$

Zeigen Sie $\mathbb{P}(R_{M,L,n}) \to 0$ $(n \to \infty)$.

(c) Setzen Sie A' in Beziehung mit $R_{M,L,n}$ und folgern Sie $\mathbb{P}(A) = 1$.

Aufgabe P6 (Separabilität).

In dieser Aufgabe werden zwei Räume betrachtet und auf Separabilität untersucht.

(a) Sei

$$\ell^0(\mathbb{R}) := \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } 0\},$$

und $\|a\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Zeigen Sie, dass $(\ell^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ separabel ist.

(b) Sei

$$D[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \forall x_0 \in \mathbb{R} : \lim_{x\downarrow x_0} f(x) = f(x_0), \lim_{x\uparrow x_0} f(x) \text{ existiert und ist endlich}\}$$

der Raum der rechtsseitig stetigen Funktionen mit existierenden linksseitigen Grenzwerten. Zeigen Sie, dass $(D[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ nicht separabel ist.
Hinweis: Betrachten Sie $f_a(x) := \mathbb{1}_{[0,a)}(x)$.

Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`