Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Präsenzblatt 0

Aufgabe P1 (Explizite Darstellung der Produkt-σ-Algebra).
Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ ein Messraum, T eine Indexmenge und

$$\mathcal{X}^T = \{(x_t)_{t\in T} : \forall t \in T : x_t \in \mathcal{X}\} = \{f : T \to \mathcal{X} \text{ Abbildung}\}$$

der Produktraum mit den beiden geläufigen Interpretationen der Elemente als Tupel oder Abbildungen. Die Produkt-σ-Algebra ist definiert durch

$$\mathcal{B}^T := \sigma(\{\pi_t : t \in T\}), \qquad \pi_t : \mathcal{X}^T \to \mathcal{X}, \pi_t((x_s)_{t\in T}) := x_t.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gibt die folgende explizite Darstellung:

$$\mathcal{B}^T = \bigcup_{I \subset T \text{abzählbar}} \pi_{T,I}^{-1}(\mathcal{B}^I)$$

(b) Es sei nun $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $T = \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob

$$\begin{aligned} A_1 &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \sin(x)\}, \\ A_2 &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \lim_{x\to 0} f(x) = 0\}, \\ A_3 &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{Z} : f(x) = 1\} \end{aligned}$$

jeweils erfüllen: $A_i \in \mathcal{B}^T$ oder $A_i \notin \mathcal{B}^T$.
Hinweis: Gemäß (a) hat ein Element $A \in \mathcal{B}^T$ notwendig die Struktur $A = \pi_{T,I}^{-1}(B) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | (f(t))_{t\in I} \in B\}$ mit einem $I \subset T$ abzählbar, $B \in \mathcal{B}^T$. Dies bedeutet, dass nur an abzählbar viele Indizes überhaupt Einschränkungen gemacht werden können.

Lösung:

(a) Es ist $\mathcal{B}^T = \sigma(\mathcal{E})$ mit

$$\mathcal{E} = \{\pi_t^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}, t \in T\}.$$

Setze

$$\mathcal{C} := \bigcup_{I \subset T \text{ abzählbar}} \pi_{T,I}^{-1}(\mathcal{B}^I).$$

Wir zeigen:

(1) $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$

(2) $\mathcal{C}$ ist σ-Algebra

(3) $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}^T$

Aus (1) und (2) folgt
$$\mathcal{B}^T = \sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$$
Zusammen mit (3) folgt $\mathcal{B}^T = \mathcal{C}$.
Beweis von (1),(2),(3):

(1) Sei $E = \pi_t^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ mit $A \in \mathcal{B}$, $t \in T$. Dann ist
$$E = \pi_{T,I}^{-1}(A)$$
mit $I = \{t\}$ und $A \in \mathcal{B} = \mathcal{B}^I$, also $E \in \mathcal{C}$.

(2) $\mathcal{C}$ ist σ-Algebra, denn:

(a) Für beliebiges $I \subset T$ endlich ist $\mathcal{X}^I \in \mathcal{B}^I$, und damit $\Omega = \pi_{T,I}^{-1}(\mathcal{X}^I) \in \mathcal{C}$.

(b) Sei $E \in \mathcal{C}$. Dann gibt es $I \subset T$ abzählbar, $B \in \mathcal{B}^I$ mit $E = \pi_{T,I}^{-1}(B)$. Es folgt (Komplementstabilität des Urbilds):
$$E^c = \pi_{T,I}^{-1}(\underbrace{B^c}_{\in \mathcal{B}^I}) \in \mathcal{C}.$$

(c) Seien $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$. Dann gibt es $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ alle abzählbar, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}^I$ mit $E_n = \pi_{T,I_n}^{-1}(B_n)$. Definiere
$$I := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n,$$
und
$$\tilde{B}_n = \pi_{I,I_n}^{-1}(B_n) \in \mathcal{B}^I$$
Dann gilt wegen $\pi_{T,I_n} = \pi_{I,I_n} \circ \pi_{T,I}$:
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_{T,I_n}^{-1}(B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_{T,I}^{-1}(\pi_{I,I_n}^{-1}(B_n)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_{T,I}^{-1}(\tilde{B}_n) = \pi_{T,I}^{-1}\Big(\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{B}_n}_{\in \mathcal{B}^I}\Big) \in \mathcal{C}.$$

(3) Sei $I \subset T$ abzählbar. Wir zeigen, dass $\pi_{T,I}^{-1}(\mathcal{B}^I) \subset \mathcal{B}^T$. Da $\mathcal{B}^I = \sigma(\mathcal{E}_2)$ mit $\mathcal{E}_2 = \{\pi_{I,\{t\}}^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}, t \in I\}$, genügt es zu zeigen, dass
$$\pi_{T,I}^{-1}(\mathcal{E}_2) \subset \mathcal{B}^T.$$
Beweis hiervon: Sei $C \in \pi_{T,I}^{-1}(\mathcal{E}_2)$ beliebig. Dann gibt $E \in \mathcal{E}_2$ mit $C = \pi_{T,I}^{-1}(E)$ und $A \in \mathcal{B}$, $t \in I$ mit $E = \pi_{I,\{t\}}^{-1}(A)$. Insgesamt also
$$C = \pi_{T,I}^{-1}(E) = \pi_{T,I}^{-1}(\pi_{I,\{t\}}^{-1}(A)) \overset{\pi_{I,\{t\}}\circ\pi_{T,I} = \pi_{T,\{t\}}}{=} \pi_{T,\{t\}}^{-1}(A) \in \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{B}^T.$$

(b)
- A_1 nimmt nicht nur abzählbar viele Einschränkungen vor, sondern verlangt, dass die Elemente an allen Stellen mit Sinus übereinstimmen. Im Grunde geht es um die Menge $A_1 = \{\sin\}$. Wäre $A_1 \in \mathcal{B}^T$, gäbe es nach (a) ein abzählbares $I \subset \mathbb{R}$ mit $B \in \mathcal{B}^I$ mit
$$A_1 = \pi_{\mathbb{R},I}^{-1}(B).$$

Es folgt dann (Regel $f(f^{-1}(B)) = B$ für surjektive f, für Projektionen erfüllt):

$$\{\sin(t) : t \in I\} = \pi_{\mathbb{R},I}(A_1) = B$$

Das bedeutet, es ist

$$A_1 = \pi_{\mathbb{R},I}^{-1}(B) = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \forall t \in I : f(t) = \sin(t)\}.$$

Das ist offensichtlich falsch, denn in der rechten Menge sind noch viele weitere Funktionen enthalten, beispielsweise

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} \sin(t), & t \in I, \\ 0, & t \notin I. \end{cases}$$

- A_2 hängt ebenfalls von überabzählbar vielen Argumenten in der Nähe von 0 ab. Unter der Annahme, dass doch eine Charakterisierung der Funktionen mit existierendem Limes bei 0 möglich wäre, geben wir eine weitere Funktion an, deren Limes nicht existiert, die aber die Charakterisierung erfüllt. Wäre $A_2 \in \mathcal{B}^T$, gäbe es nach (a) ein abzählbares $I \subset \mathbb{R}$ mit $B \in \mathcal{B}^I$ mit

  $$A_2 = \pi_{\mathbb{R},I}^{-1}(B). \qquad (*)$$

  Da $A_2 \neq \emptyset$, ist auch $B \neq \emptyset$, also gibt es $(b_x)_{x\in I} \in B$. Definiere

  $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} b_x, & x \in I, \\ 1, & x \in \mathbb{R}\backslash I. \end{cases}$$

  Offensichtlich ist

  $$f \in \pi_{\mathbb{R},I}^{-1}(\underbrace{\{(b_x)_{x\in I}\}}_{\subset B}) \in \pi_{\mathbb{R},I}^{-1}(B).$$

  Aber $f \notin A_2$ (und damit Widerspruch zu (*)), denn für eine beliebige Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\backslash I$ mit $x_n \to 0$ gilt

  $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0,$$

  also $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$.

- A_3 nimmt nur abzählbar viele Einschränkungen an Elementen aus $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vor. Es besitzt eine Darstellung

  $$A_3 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \forall x \in \mathbb{Z} : f(x) = 1\} = \pi_{\mathbb{R},\mathbb{Z}}^{-1}(\{1\}_{x\in\mathbb{Z}}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{R}},$$

  denn

  $$\{1\}_{x\in\mathbb{Z}} = \bigcap_{x\in\mathbb{Z}} \pi_{\mathbb{Z},\{x\}}^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}.$$

Aufgabe P2 (Alternative Messräume).

Die Indexmenge erfülle $T \subset \mathbb{R}$ und es sei $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Tauchen bei der wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtung einer Situation nur stetige Prozesse auf, kann anstatt des Produktraums $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R})^T)$ auch die Einschränkung

$$(C(T), \mathcal{B}(\mathbb{R})^T \cap C(T))$$

betrachtet werden. Hierbei ist $C(T) = \{f : T \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R})^T \cap C(T) := \{A \cap C(T) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^T\}$. Zeigen Sie:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})^T \cap C(T) = \mathcal{B}(C(T)),$$

wobei $C(T)$ mit der Norm $\|f\|_\infty := \sup_{x \in T} |f(x)|$ ausgestattet wird.
Anmerkung und Hinweis:

- *Hierbei geht es darum, die Gleichheit zweier Sigma-Algebren zu zeigen. Die linke entsteht als Einschränkung aller Mengen der Produkt-Sigma-Algebra auf die stetigen Funktionen. Die rechte ist die Borelsche Sigma-Algebra der stetigen Funktionen, wobei die offenen Mengen durch die Supremums-Norm charakterisiert werden.*

- *Zeigen Sie zuerst:*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})^T \cap C(T) = \sigma(\mathcal{E}_1), \qquad \mathcal{E}_1 = \{\tilde{\pi}_t^{-1}(B) : t \in T, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \textit{ mit } \tilde{\pi}_t = \pi_t\big|_{C(T)}.$$

- *Auch $\mathcal{B}(C(T)) = \sigma(\mathcal{E}_2)$ mit einem geeigneten Mengensystem $\mathcal{E}_2$.*

- *Die Gleichheit der Sigma-Algebren kann dann durch $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{B}(C(T))$ und $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})^T \cap C(T)$ gezeigt werden.*

Lösung: TEIL 1: Es gilt

$$\underline{\underline{\mathcal{B}(\mathbb{R})^T \cap C(T) = \sigma(\mathcal{E}_1)}}, \qquad \mathcal{E}_1 = \{\tilde{\pi}_t^{-1}(B) : t \in T, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \text{ mit } \tilde{\pi}_t = \pi_t\big|_{C(T)},$$

denn:

(1) $\mathcal{B}(\mathbb{R})^T \cap C(T) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^T\big|_{C(T)}$ ist als Spur-Sigma-Algebra wieder eine Sigma-Algebra (WT1) auf $C(T)$.
Hier wurde nichts gerechnet; es ist einfach bekannt, dass diese Art von Struktur, bei welcher alle Mengen einer Sigma-Algebra mit einer Menge A geschnitten werden, dann eine Sigma-Algebra über A bildet.

(2) Für die Urbilder der Projektionen gilt:

$$\tilde{\pi}_t^{-1}(B) = \pi_t^{-1}(B) \cap C(T)$$

Damit folgt, dass $\mathcal{E}_1$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}(\mathbb{R})^T \cap C(T)$ bildet.

Wir zeigen nun $\underline{\underline{\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{B}(C(T))}}$: Betrachte

$$\mathcal{E}_1' := \{\tilde{\pi}_t^{-1}(B) : t \in T, B \subset \mathbb{R} \text{ offen}\}.$$

Es gilt $\mathcal{E}_1' \subset \mathcal{E}_1$, und wegen $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{B \subset \mathbb{R} \text{ offen}\})$ auch $\sigma(\mathcal{E}_1') = \sigma(\mathcal{E}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^T \cap C(T)$. Es genügt also, $\mathcal{E}_1' \subset \mathcal{B}(C(T))$ zu zeigen.

Es gilt: $\tilde{\pi}_t : C(T) \to \mathbb{R}$ ist stetig, denn: Seien $f, g \in C(T)$, so ist

$$|\pi_t(f) - \pi_t(g)| = |f(t) - g(t)| \leq \|f - g\|_\infty.$$

Sei nun $E \in \mathcal{E}_1'$. Dann gibt es $B \subset \mathbb{R}$ offen, $t \in T$ mit

$$E = \tilde{\pi}_t^{-1}(B).$$

Da $\tilde{\pi}_t$ stetig, B offen, ist auch $E = \tilde{\pi}_t^{-1}(B)$ offen. Da $\mathcal{B}(C(T))$ Borelsche Sigma-Algebra, enthält sie die offenen Mengen, also $E \in \mathcal{B}(C(T))$.

TEIL 2: Da $(C(T), \|\cdot\|_\infty)$ separabel ist, gibt es eine abzählbar dichte Teilmenge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $C(T)$. Dann bildet

$$\mathcal{E}_2 := \{U_\varepsilon(f_n) : \varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}\}$$

eine Basis der Topologie, denn jede offene Menge lässt sich schreiben als abzählbare Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{E}_2$. Daher ist

$$\underline{\underline{\mathcal{B}(C(T)) = \sigma(\mathcal{E}_2)}}.$$

Wir zeigen nun $\underline{\underline{\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})^T \cap C(T)}}$: Sei $E \in \mathcal{E}_2$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned}
E &= U_\varepsilon(f_n) = \{g \in C(T) : \sup_{x\in T} |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon\} \\
&= \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{g \in C(T) : \sup_{x\in T} |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon - \frac{1}{m}\} \\
&\overset{f_n, g \text{ stetig}}{=} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{g \in C(T) : \forall x \in T \cap \mathbb{Q} : |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon - \frac{1}{m}\} \\
&= \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{x\in T\cap\mathbb{Q}} \{g \in C(T) : |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon - \frac{1}{m}\} \\
&= \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{x\in T\cap\mathbb{Q}} \underbrace{\tilde{\pi}_x^{-1}\Big(\underbrace{[f_n(x) - \varepsilon + \frac{1}{m}, f_n(x) + \varepsilon - \frac{1}{m}]}_{\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}\Big)}_{\in\mathcal{E}_1\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})^T\cap C(T)} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^T \cap C(T).
\end{aligned}$$

Aus den vier doppelt unterstrichenen Beziehungen folgt $\mathcal{B}(\mathbb{R})^T \cap C(T) = \mathcal{B}(C(T))$.

Aufgabe P3 (Gaußsche Prozesse und Brownsche Bewegung).

Bei dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass bestimmte Kombinationen von Gauß-Prozessen bzw. Brownschen Bewegungen wieder Gauß-Prozesse bzw. Brownsche Bewegungen ergeben. Hierfür sind vor allem Kenntnisse der Regeln für die Transformation von multivariaten Normalverteilungen relevant.

(a) Sei $(X_t)_{t\in T}$ ein Gauß-Prozess mit Mittelwertfunktion μ, Kovarianzfunktion γ, und $(Y_t)_{t\in T}$ ein weiterer, von $(X_t)_{t\in T}$ unabhängiger Gauß-Prozesse mit Fkt. $\tilde{\mu}$, $\tilde{\gamma}$.

- Zeigen Sie: Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist auch $(aX_t + b)_{t\in T}$ ein Gauß-Prozess.
- Zeigen Sie: $(X_t + Y_t)_{t\in T}$ ist ein Gauß-Prozess.

Geben Sie die Mittelwert- und Kovarianzfunktionen an.

(b) Sei $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung und $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$(\alpha \cdot W_{\frac{t}{\alpha^2}})_{t\in[0,\infty)}$$

eine Brownsche Bewegung ist (die sog. *Skalierungsinvarianz der BB*).

Lösung:

(a)

- Betrachte $(Z_t)_{t\in T} = (aX_t + b)_{t\in T}$: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $t_1, ..., t_n \in T$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} Z_{t_1} \\ \vdots \\ Z_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_{t_1} + b \\ \vdots \\ aX_{t_n} + b \end{pmatrix} = (aI_{n\times n}) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{pmatrix}}_{\sim N(\mu,\Sigma)} + \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}}_{=:B} \sim N(aI_{n\times n}\mu + B, (aI_{n\times n})\Sigma(aI_{n\times n})')$$

aufgrund der Regeln zur Transformation von multivariaten Normalverteilungen. Außerdem ist bekannt, da $(X_t)_{t\in T}$ Gauß-Prozess, dass

$$\begin{pmatrix} X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{pmatrix} \sim N(\mu, \Sigma) \quad \text{mit} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu(t_1) \\ \vdots \\ \mu(t_n) \end{pmatrix}, \quad \Sigma = (\gamma(t_i, t_j))_{i,j=1,\ldots,n}.$$

Damit ist gezeigt, dass auch die endlichdimensionalen Verteilungen von $(Z_t)_{t\in T}$ multivariate Normalverteilungen sind, also $(Z_t)_{t\in T}$ ein Gauß-Prozess ist.
Die Mittelwertfunktion ist

$$\mu_Z(t) = \mathbb{E}[aX_t + b] = a\mathbb{E}[X_t] + b = a\mu(t) + b,$$

die Kovarianzfunktion ist

$$\gamma_Z(s,t) = \mathrm{Cov}(aX_s + b, aX_t + b) = a^2\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = a^2\gamma(s,t).$$

- Betrachte $(Z_t)_{t\in T} = (X_t + Y_t)_{t\in T}$: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $t_1, ..., t_n \in T$. Da $(X_t)_{t\in T}$, $(Y_t)_{t\in T}$ unabhängige Gauß-Prozesse sind, gilt einerseits

$$\begin{pmatrix} X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{pmatrix} \sim N(\mu_X, \Sigma_X), \qquad \begin{pmatrix} Y_{t_1} \\ \vdots \\ Y_{t_n} \end{pmatrix} \sim N(\mu_Y, \Sigma_Y)$$

mit $\mu_X = (\mu(t_i))_{i=1,\ldots,n}$, $\mu_Y = (\tilde{\mu}(t_i))_{i=1,\ldots,n}$ und $\Sigma_X = (\gamma(t_i,t_j))_{i,j=1,\ldots,n}$, $\Sigma_Y = (\tilde{\gamma}(t_i,t_j))_{i,j=1,\ldots,n}$ und diese beiden Vektoren sind unabhängig. Aufgrund der Transformationsregeln für multivariate Normalverteilungen folgt

$$\begin{pmatrix} Z_{t_1} \\ \vdots \\ Z_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{t_1} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_{t_1} \\ \vdots \\ Y_{t_n} \end{pmatrix} \sim N(\mu_X + \mu_Y, \Sigma_X + \Sigma_Y).$$

Damit ist gezeigt, dass auch die endlichdimensionalen Verteilungen von $(Z_t)_{t\in T}$ multivariate Normalverteilungen sind, also $(Z_t)_{t\in T}$ ein Gauß-Prozess ist.
Die Mittelwertfunktion ist

$$\mu_Z(t) = \mathbb{E}[X_t + Y_t] = \mathbb{E}[X_t] + \mathbb{E}[Y_t] = \mu(t) + \tilde{\mu}(t),$$

die Kovarianzfunktion ist

$$\gamma_Z(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s + Y_s, X_t + Y_t) \overset{X,Y\ \text{unabh.}}{=} \mathrm{Cov}(X_s, X_t) + \mathrm{Cov}(Y_s, Y_t) = \gamma(s,t) + \tilde{\gamma}(s,t).$$

(b) Sei $(Z_t)_{t\in[0,\infty)} = (\alpha \cdot W_{\frac{t}{\alpha^2}})_{t\in[0,\infty)}$. Man kann entweder zeigen, dass $(Z_t)_{t\in[0,\infty)}$ die Definition einer Brownschen Bewegung erfüllt oder dass es ein zentrierter Gauß-Prozess ist mit stetigen Pfaden. Wir zeigen direkt die Definition.

(W1) Es ist $Z_0 = \alpha \cdot W_{\frac{0}{\alpha^2}} = \alpha \cdot W_0 = 0$ $\mathbb{P}$-f.s., da $W_0 = 0$ $\mathbb{P}$-f.s.

(W2) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$. Dann gilt auch

$$0 = \frac{t_0}{\alpha^2} < \frac{t_1}{\alpha^2} < ... < \frac{t_n}{\alpha^2}.$$

Da $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ Brownsche Bewegung ist, sind daher

$$W_{\frac{t_i}{\alpha^2}} - W_{\frac{t_{i-1}}{\alpha^2}}, \quad i = 1, ..., n$$

stochastisch unabhängig. Multiplikation der Zufallsvariablen mit α (deterministisch) liefert, dass auch

$$Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}} = \alpha(W_{\frac{t_i}{\alpha^2}} - W_{\frac{t_{i-1}}{\alpha^2}}), \quad i = 1, ..., n$$

stochastisch unabhängig sind.

(W3) Seien $0 \leq s \leq t$. Dann ist $0 \leq \frac{s}{\alpha^2} \leq \frac{t}{\alpha^2}$ und da $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ Brownsche Bewegung ist, folgt

$$W_{\frac{t}{\alpha^2}} - W_{\frac{s}{\alpha^2}} \sim N\Big(0, \frac{t}{\alpha^2} - \frac{s}{\alpha^2}\Big).$$

Multiplikation mit α liefert

$$Z_t - Z_s = \alpha(W_{\frac{t}{\alpha^2}} - W_{\frac{s}{\alpha^2}}) \sim N\Big(0, \alpha^2 \cdot (\frac{t}{\alpha^2} - \frac{s}{\alpha^2})\Big) = N(0, t-s).$$

(W4) Die Funktion $f : [0,\infty) \to [0,\infty), f(t) = \frac{t}{\alpha^2}$ ist stetig. Sei $N \in \mathcal{A}$ die Nullmenge, auf welcher $t \mapsto W_t$ nicht stetig ist. Auf N^c gilt dann:

$$t \mapsto Z_t = \alpha W_{\frac{t}{\alpha^2}} = \alpha W_{f(t)}$$

ist stetig als Komposition stetiger Funktionen. Damit ist auch $t \mapsto Z_t$ $\mathbb{P}$-f.s. stetig.

Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`