Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
*Wahrscheinlichkeitstheorie 2*
Sommersemester 2023

## Präsenzblatt 0

### Aufgabe P1 (Explizite Darstellung der Produkt-$\sigma$-Algebra).

Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ ein Messraum, $T$ eine Indexmenge und

$$\mathcal{X}^T = \{(x_t)_{t\in T} : \forall t \in T : x_t \in \mathcal{X}\} = \{f : T \to \mathcal{X} \text{ Abbildung}\}$$

der Produktraum mit den beiden geläufigen Interpretationen der Elemente als Tupel oder Abbildungen. Die Produkt-$\sigma$-Algebra ist definiert durch

$$\mathcal{B}^T := \sigma(\{\pi_t : t \in T\}), \qquad \pi_t : \mathcal{X}^T \to \mathcal{X}, \pi_t((x_s)_{t\in T}) := x_t.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gibt die folgende explizite Darstellung:

$$\mathcal{B}^T = \bigcup_{I\subset T \text{abzählbar}} \pi_{T,I}^{-1}(\mathcal{B}^I)$$

(b) Es sei nun $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $T = \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob

$$\begin{aligned} A_1 &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \sin(x)\}, \\ A_2 &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \lim_{x\to 0} f(x) = 0\}, \\ A_3 &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{Z} : f(x) = 1\} \end{aligned}$$

jeweils erfüllen: $A_i \in \mathcal{B}^T$ oder $A_i \notin \mathcal{B}^T$.
*Hinweis: Gemäß (a) hat ein Element $A \in \mathcal{B}^T$ notwendig die Struktur $A = \pi_{T,I}^{-1}(B) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | (f(t))_{t\in I} \in B\}$ mit einem $I \subset T$ abzählbar, $B \in \mathcal{B}^T$. Dies bedeutet, dass nur an abzählbar viele Indizes überhaupt Einschränkungen gemacht werden können.*

### Aufgabe P2 (Alternative Messräume).

Die Indexmenge erfülle $T \subset \mathbb{R}$ und es sei $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Tauchen bei der wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtung einer Situation nur stetige Prozesse auf, kann anstatt des Produktraums $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R})^T)$ auch die Einschränkung

$$(C(T), \mathcal{B}(\mathbb{R})^T \cap C(T))$$

betrachtet werden. Hierbei ist $C(T) = \{f : T \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R})^T \cap C(T) := \{A \cap C(T) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^T\}$. Zeigen Sie:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})^T \cap C(T) = \mathcal{B}(C(T)),$$

wobei $C(T)$ mit der Norm $\|f\|_\infty := \sup_{x\in T} |f(x)|$ ausgestattet wird.
*Anmerkung und Hinweis:*

- *Hierbei geht es darum, die Gleichheit zweier Sigma-Algebren zu zeigen. Die linke entsteht als Einschränkung aller Mengen der Produkt-Sigma-Algebra auf die stetigen Funktionen. Die rechte ist die Borelsche Sigma-Algebra der stetigen Funktionen, wobei die offenen Mengen durch die Supremums-Norm charakterisiert werden.*
- *Zeigen Sie zuerst:*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})^T \cap C(T) = \sigma(\mathcal{E}_1), \qquad \mathcal{E}_1 = \{\tilde{\pi}_t^{-1}(B) : t \in T, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \textit{ mit } \tilde{\pi}_t = \pi_t\big|_{C(T)}.$$

- *Auch* $\mathcal{B}(C(T)) = \sigma(\mathcal{E}_2)$ *mit einem geeigneten Mengensystem* $\mathcal{E}_2$.
- *Die Gleichheit der Sigma-Algebren kann dann durch* $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{B}(C(T))$ *und* $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})^T \cap C(T)$ *gezeigt werden.*

**Aufgabe P3 (Gaußsche Prozesse und Brownsche Bewegung).**

Bei dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass bestimmte Kombinationen von Gauß-Prozessen bzw. Brownschen Bewegungen wieder Gauß-Prozesse bzw. Brownsche Bewegungen ergeben. Hierfür sind vor allem Kenntnisse der Regeln für die Transformation von multivariaten Normalverteilungen relevant.

(a) Sei $(X_t)_{t\in T}$ ein Gauß-Prozess mit Mittelwertfunktion $\mu$, Kovarianzfunktion $\gamma$, und $(Y_t)_{t\in T}$ ein weiterer, von $(X_t)_{t\in T}$ unabhängiger Gauß-Prozesse mit Fkt. $\tilde{\mu}$, $\tilde{\gamma}$.

- Zeigen Sie: Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist auch $(aX_t + b)_{t\in T}$ ein Gauß-Prozess.
- Zeigen Sie: $(X_t + Y_t)_{t\in T}$ ist ein Gauß-Prozess.

Geben Sie die Mittelwert- und Kovarianzfunktionen an.

(b) Sei $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung und $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$(\alpha \cdot W_{\frac{t}{\alpha^2}})_{t\in[0,\infty)}$$

eine Brownsche Bewegung ist (die sog. *Skalierungsinvarianz der BB*).

**Vorlesungswebseite:**
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`