(4) (e) Donsker-Theorem (Klasse $\mathcal{F} = \{ \mathbb{1}_{\{\cdot \le x\}} : x \in [0,1] \}$ ist P^{X_1}-Donsker)

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{n}\,(\hat{F}_n - F)}_{=(\mathbb{G}_n(f))_{f\in\mathcal{F}}} \xrightarrow{d} \underbrace{W^\circ}_{\text{Brownsche Brücke}} \quad \text{in } (\ell^\infty([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$$

Sei $\Phi: \ell^\infty([0,1]) \to \ell^\infty([0,1])$

$\Phi(f) = \sin(f)$

(d.h. $x \mapsto \sin(f(x))$)

1) Φ ist stetig, denn für $f, g \in \ell^\infty([0,1])$ gilt

$$|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| = |\sin(f(x)) - \sin(g(x))| \underset{\sin\ \text{L-stetig}}{\le} |f(x) - g(x)|$$

$$\Rightarrow \|\Phi(f) - \Phi(g)\| \le \|f-g\|_\infty$$

$$\underset{\text{CMT}}{\Rightarrow} \underset{\sin(\sqrt{n}(\hat{F}_n - F))}{\underset{\|}{\Phi(\sqrt{n}(\hat{F}_n - F))}} \xrightarrow{d} \underset{\sin(W^\circ)}{\underset{\|}{\Phi(W^\circ)}}$$

2) Φ ist Hadamard-diff'bar in F, denn

Verteilungsfkt. von X_1

für $h, (h_t)_t \subseteq \ell^\infty([0,1])$ mit $\|h_t - h\|_\infty \to 0$ $\quad \begin{pmatrix} t\in\mathbb{R} \\ t\to 0\end{pmatrix}$

und $f \in \ell^\infty([0,1])$ gilt:

$$\frac{\Phi(f + t\cdot h_t) - \Phi(f)}{t} = \frac{\sin(f + t\cdot h_t) - \sin(f)}{t} \cdot \frac{h_t}{h_t}$$

$$\underset{\substack{\text{Mittelwertsatz} \\ \text{sinus} \\ (f+th_t)-f = th_t}}{=} \cos(\xi_t)\cdot h_t$$

mit $\xi_t(x)$ zwischen $(f+th_t)(x)$, $f(x)$ für jedes $x\in[0,1]$

$$\Rightarrow \left| \frac{\Phi(f+th_t)(x) - \Phi(f)(x)}{t} - \cos(f(x))\cdot h \right| = |\cos(\xi_t(x))\cdot h_t(x) - \cos(f(x))\cdot h(x)|$$

4 (e) weiter:

$$\leq \underbrace{|\cos(\xi_t(x)) - \cos(f(x))|}_{\leq |\xi_t(x) - f(x)| \leq |t| \cdot |h_t(x)|} \cdot |h_t(x)| + \underbrace{|\cos(f(x))|}_{\leq 1} \cdot |h_t(x) - h(x)|$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\Phi(f+th_t)-\Phi(f)}{t} - \cos(f)\cdot h \right\|_\infty \leq \underbrace{|t|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|h_t\|_\infty^2}_{\to \|h\|_\infty^2} + \underbrace{\|h_t - h\|_\infty}_{\to 0} \to 0 \quad (t \to 0)$$

Also Φ Hadamard-diff'bar mit

$$\Phi_f'(h) = \cos(f)\cdot h.$$

$$\underset{\text{Delta-Regel}}{\Longrightarrow} \underbrace{\sqrt{n}\left(\Phi(\hat{F}_n) - \Phi(F)\right)}_{\sqrt{n}\,(\sin(\hat{F}_n) - \sin(F))} \xrightarrow{d} \Phi_F'(W^\circ) = \underline{\underline{\cos(F)\cdot W^\circ}} \quad \text{in } \ell^\infty([0,1])$$

Der Grenzwert ist ein zentrierter Gauß-Prozess mit Kovarianzfkt.

$$\gamma(s,t) = \operatorname{cov}\left(\cos(F(s))W^\circ(s), \cos(F(t))W^\circ(t)\right)$$
$$= \cos(F(s))\cos(F(t)) \cdot \underbrace{\operatorname{cov}(W^\circ(s), W^\circ(t))}_{= \min\{s,t\} - st}$$

(Brownsche Brücke).

Sei $\Phi: \ell^\infty([0,1]) \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(x)^2\,dx$$

1) Φ ist stetig, denn für $f_n, f_0 \in \ell^\infty([0,1])$ mit $\|f_n - f_0\|_\infty \to 0$ gilt (3. Binom. Formel)

$$|\Phi(f_n) - \Phi(f_0)| = \left| \int_0^1 f_n(x)^2 - f_0(x)^2\,dx \right| \leq \int_0^1 |f_n(x) - f_0(x)| \cdot |\underbrace{f_n(x)}_{= f_n - f_0 + f_0} + f_0(x)|\,dx$$

$$\leq \int_0^1 \left(\|f_n - f_0\|_\infty \cdot (\|f_n - f_0\|_\infty + 2\|f_0\|_\infty)\right) dx$$

$$\leq \underbrace{\|f_n - f_0\|_\infty}_{\to 0} \cdot \left(\underbrace{\|f_n - f_0\|_\infty}_{\to 0} + 2\|f_0\|_\infty\right) \to 0 \;//$$

④ (e) <u>weiter:</u>

$$\underset{\text{CMT}}{\Longrightarrow} \quad \Phi(\cancel{\sqrt{n}}(\hat{F}_n - F)) \xrightarrow{d} \Phi(W^\circ) = \int_0^1 W^\circ(x)^2\,dx$$

$$= n \cdot \int_0^1 (\hat{F}_n(x) - F(x))^2\,dx$$

2) Φ ist Hadamard-diff'bar in F, denn:
Für $h_t, h \in \ell^\infty([0,1])$ mit $\|h_t - h\|_\infty \to 0$ $(t \to 0)$ gilt

$$\frac{\Phi(F + th_t) - \Phi(F)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^1 (F(x) + th_t(x))^2 - F(x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^1 2tF(x)h_t(x) + t^2 h_t(x)^2\,dx$$

$$= 2\cdot\int_0^1 F(x)\underbrace{h_t(x)}_{\to h(x)}dx + \underbrace{t}_{\to 0}\cdot\int_0^1 \underbrace{h_t(x)^2}_{\to h(x)^2}dx$$

(da $h_t \to h$ gleichmäßig)

$$\longrightarrow 2\cdot\int_0^1 F(x)h(x)\,dx \qquad (t \to 0)$$

(hier „normale" Konvergenz in $\mathbb{R}$, da Bildraum von Φ $\mathbb{R}$ ist)

$$\Rightarrow \Phi'_F(h) = 2\int_0^1 F(x)h(x)\,dx$$

$$\underset{\text{Delta-Methode}}{\Longrightarrow} \quad \sqrt{n}(\Phi(\hat{F}_n) - \Phi(F)) \xrightarrow{d} \Phi'_F(W^\circ) = \underbrace{2\int_0^1 F(x)W^\circ(x)\,dx}$$

$$= \sqrt{n}\left(\int_0^1 \hat{F}_n(x)^2\,dx - \int_0^1 F(x)^2\,dx\right)$$

ist $N(0,\sigma^2)$ verteilt, denn als lineares Funktional eines Gauß-Prozesses wieder Gauß-Prozess (in $\mathbb{R}$: normalverteilte ZV)

und

$$\mathbb{E}\left(2\int_0^1 F(x)W^\circ(x)\,dx\right) \underset{\text{Fubini}}{=} 2\int_0^1 F(x)\,\underbrace{\mathbb{E}W^\circ(x)}_{=0}\,dx = 0,$$

$$\sigma^2 = \operatorname{Var}\left(2\int_0^1 F(x)\,W^\circ(x)\,dx\right) = \mathbb{E}\left[\left(\ \right)^2\right]$$

$$= 4\int_0^1\int_0^1 F(x)F(y)\,\underbrace{\mathbb{E}\left[W^\circ(x)W^\circ(y)\right]}_{=\min\{x,y\}-xy}\,dx\,dy$$

$$= 4\int_0^1\int_0^1 F(x)F(y)\cdot\left(\min\{x,y\}-xy\right)\,dx\,dy$$