4 (d) $\quad a_k = k\varepsilon, \quad k = 0, \ldots, N-1, \quad N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$

(a) $a_N = 1$

$$B_i = (a_{i-1}, a_i] \qquad (i = 2, \ldots, N)$$
$$B_1 = [a_0, a_1]$$

Für $f \in \mathcal{F}$ definiere $\quad \tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon \cdot \left\lfloor \frac{f(a_i)}{\varepsilon} \right\rfloor \cdot \mathbb{1}_{B_i}(x).$

Dann gilt

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| = \left| \sum_{i=1}^{N} f(x) \cdot \mathbb{1}_{B_i}(x) - \sum_{i=1}^{N} \varepsilon \left\lfloor \frac{f(a_i)}{\varepsilon} \right\rfloor \mathbb{1}_{B_i}(x) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} \left| f(x) \underset{\pm f(a_i)}{\uparrow} - \varepsilon \cdot \left\lfloor \frac{f(a_i)}{\varepsilon} \right\rfloor \right| \cdot \mathbb{1}_{B_i}(x)$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f(a_i)|}_{\underset{f \text{ L-st.}}{\leq} |x - a_i| \underset{x \in B_i}{\leq} |a_{i-1} - a_i| \leq \varepsilon} + \underbrace{\left| \frac{f(a_i)}{\varepsilon}\varepsilon - \left\lfloor \frac{f(a_i)}{\varepsilon} \right\rfloor \varepsilon \right|}_{= \varepsilon \cdot \underbrace{\left| \frac{f(a_i)}{\varepsilon} - \left\lfloor \frac{f(a_i)}{\varepsilon} \right\rfloor \right|}_{\leq 1}}$$

$$\leq 2\varepsilon$$

$$\leq \underline{\underline{2\varepsilon}}$$

Es gilt also $\tilde{f} - 2\varepsilon \leq f \leq \tilde{f} + 2\varepsilon$ (X)

Es gibt insgesamt höchstens $N \cdot 7^N$ verschiedene $\tilde{f}$.

Für $\tilde{f}(a_0)$ gibt es die Mgl. $\{0, \varepsilon, \ldots, (N-1)\varepsilon\} \leftarrow N$ Stück

Für $\tilde{f}(a_i)$ gilt wegen $\quad |\tilde{f}(a_i) - \tilde{f}(a_{i-1})| = \varepsilon \cdot \left| \left\lfloor \frac{f(a_i)}{\varepsilon} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{f(a_{i-1})}{\varepsilon} \right\rfloor \right|$

$$\leq \varepsilon \cdot \left( 2 + \left| \frac{f(a_i) - f(a_{i-1})}{\varepsilon} \right| \right)$$

$$\leq 3\varepsilon$$

das heißt, ausgehend von $\tilde{f}(a_{i-1})$

kann $\tilde{f}(a_i) \in \{-3\varepsilon, -2\varepsilon, -\varepsilon, 0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon\} + \tilde{f}(a_i)$ sein (7 Möglichk.)

Für $i = 1, \ldots, N$ also $7^N$ Mögl.

④ (d) weiter:

$$\Rightarrow \left|\{\tilde{f} : f \in \mathcal{F}\}\right| = N \cdot 7^N$$

$\circledast \Rightarrow$ Brackets sind gegeben durch $[\ell_f, u_f]_{f \in \mathcal{F}}$ mit $\ell_f = \tilde{f} - 2\varepsilon$, $u_f = \tilde{f} + 2\varepsilon$

Für diese gilt

$$\| u_f - \ell_f \|_r = \| 4\varepsilon \|_r = 4\varepsilon.$$

$$\Rightarrow N_r(4\varepsilon, \mathcal{F}, P) \leq N \cdot 7^N \leq \frac{2}{\varepsilon} \cdot 7^{2/\varepsilon}$$

$N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1 \leq \frac{2}{\varepsilon}$ (für $\varepsilon < 1$)

$$\Rightarrow N_r(\varepsilon, \mathcal{F}, P) \leq \frac{8}{\varepsilon} \cdot 7^{8/\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \log N_r(\varepsilon, \mathcal{F}, P) \leq \underbrace{\log\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)}_{\leq 1 + \left(\frac{8}{\varepsilon} - 1\right)} + \frac{8}{\varepsilon} \log(7) \leq \frac{8}{\varepsilon} \cdot (\log(7) - 1) = \frac{A}{\varepsilon}$$

mit $A = 8 \cdot (\log(7) - 1)$

---

(b) Es gilt

$$J_2(1, \mathcal{F}, P) = \int_0^1 \sqrt{1 \vee \log(N_2(\varepsilon, \mathcal{F}, P))}\, d\varepsilon \leq \int_0^1 \sqrt{1 \vee \frac{A}{\varepsilon}}\, d\varepsilon$$

$$\underset{\substack{A \geq 1 \\ \varepsilon < 1}}{\leq} \int_0^1 \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\varepsilon}}\, d\varepsilon = 2\sqrt{A}\sqrt{\varepsilon}\Big|_0^1 = 2\sqrt{A} < \infty.$$

$$\underset{\substack{\text{Klasse P-Donsker} \\ \forall x \in [0,1]:\ \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x) - Pf| \leq 2}}{\Longrightarrow} (\mathbb{G}_n(f))_{f \in \mathcal{F}} \xrightarrow{d} (\mathbb{G}(f))_{f \in \mathcal{F}} \text{ in } \ell^\infty(\mathcal{F})$$

mit Gauß-Prozess $\mathbb{G}$ mit Kovarianzfkt.

$$\gamma(f_1, f_2) = \operatorname{cov}(f_1(X), f_2(X)).$$

4 (d)

c) $X_i \sim U[0,1]$ iid

$$\sqrt{n}\left(\hat{H}_n(a) - H(a)\right) = \mathbb{G}_n(f_a), \qquad f_a(x) = \sin\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{n}\left(\hat{H}_n(a) - H(a)\right)\right)_{a \geq 1} = \left(\mathbb{G}_n(f)\right)_{f \in \tilde{\mathcal{F}}} \text{ mit } \tilde{\mathcal{F}} = \{f_a : a \geq 1\}.$$

Es gilt $\tilde{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$ aus Teil (d)(a),

denn $|f_a(x) - f_a(x')| \neq \left|\sin\left(\frac{x}{a}\right) - \sin\left(\frac{x'}{a}\right)\right| \leq \frac{|x-x'|}{a} \leq |x - x'|$

d.h. $f_a$ ist L-stetig mit Konstante 1.

<u>Es folgt</u>: $\tilde{\mathcal{F}}$ ist P-Donsker (da $\mathcal{F}$ P-Donsker)

$$\Rightarrow \left(\sqrt{n}\left(\hat{H}_n(a) - H(a)\right)\right)_{a \geq 1} = \left(\mathbb{G}_n(f)\right)_{f \in \tilde{\mathcal{F}}} \xrightarrow{d} \left(\mathbb{G}(f)\right)_{f \in \tilde{\mathcal{F}}} =: \mathbb{G}$$

in $\ell^\infty([1,\infty))$.

$\mathbb{G}$ ist zentrierter Gauß-Prozess mit Kovarianzfkt.

$$\operatorname{Cov}(\mathbb{G}(a), \mathbb{G}(a')) = \operatorname{cov}\left(\sin\left(\frac{X_1}{a}\right), \sin\left(\frac{X_1}{a'}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}\left[\sin\left(\frac{X_1}{a}\right)\sin\left(\frac{X_1}{a'}\right)\right]}_{= \int_0^1 \underbrace{\sin\left(\frac{x}{a}\right)\sin\left(\frac{x}{a'}\right)}_{\text{(schwierig explizit)}} dx} - \underbrace{\mathbb{E}\sin\left(\frac{X_1}{a}\right)}_{= \int_0^1 \sin\left(\frac{x}{a}\right) dx = \left[-a\cos\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^1 = 1 - a\cos\left(\frac{1}{a}\right)} \mathbb{E}\sin\left(\frac{X_1}{a'}\right)$$

$$= \int_0^1 \sin\left(\frac{x}{a}\right)\sin\left(\frac{x}{a'}\right) dx - \left(1 - a\cos\left(\frac{1}{a}\right)\right)\left(1 - a'\cos\left(\frac{1}{a'}\right)\right).$$

d) Es gilt $\overline{X}_n \xrightarrow{f.s.} \mathbb{E}X_1 = \frac{1}{2}$ $(X_1 \sim U[0,1])$ nach SGGZ.

$\Rightarrow (\mathbb{G}_n, \overline{X}_n) \xrightarrow{d} (\mathbb{G}, \frac{1}{2})$ in $\ell^\infty([1,\infty)) \times \mathbb{R}$ und da ~~[illegible]~~ Fkt. stetig sogar in $C([1,\infty)) \times \mathbb{R}$.

$\Phi : C([1,\infty)) \times \mathbb{R}$, $(f, x) \mapsto f(x)$ ist stetig

$$\overset{\text{CMT}}{\Longrightarrow} \mathbb{G}_n(\overline{X}_n) = \Phi(\mathbb{G}_n, \overline{X}_n) \xrightarrow{d} \Phi(\mathbb{G}, \tfrac{1}{2}) = \mathbb{G}(\tfrac{1}{2}).$$

4 d) d) weiter:

$$\Rightarrow \quad \sqrt{n}\left(\hat{H}_n(\overline{X}_n) - H(\overline{X}_n)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{G}\left(\tfrac{1}{2}\right) \qquad \Big| : \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{H}_n(\overline{X}_n) - H(\overline{X}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Außerdem gilt, da $H(\cdot)$ stetig,

$$H(\overline{X}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} H\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

$$\underset{\text{Slutzky}}{\Rightarrow} \quad \hat{H}_n(\overline{X}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} H\left(\tfrac{1}{2}\right) = \mathbb{E}\sin(2X)$$

$$= \underline{\underline{1 - \tfrac{1}{2}\cos(2)}}$$