4(a)

Seien $[l_i, u_i]$ die ε-Brackets zur Klasse $\mathcal{F}$.

Definiere Brackets
$$\tilde{l}_i := g \circ l_i, \quad \tilde{u}_i := g \circ u_i \quad , \; i = 1, \dots, N$$

Dann sind $[\tilde{l}_i, \tilde{u}_i]$ Brackets für $\mathcal{G}$, denn für jede Fkt. $h \in \mathcal{G}$ gilt $h = g \circ f$ und es folgt für das Bracket $[l_i, u_i]$ von f in $\mathcal{F}$:

$$l_i \le f \le u_i$$

$$\Rightarrow \tilde{l}_i = g \circ l_i \le g \circ f \le g \circ u_i = \tilde{u}_i$$

g monoton wachsend

Außerdem gilt
$$\| \tilde{u}_i - \tilde{l}_i \|_r = \| g \circ u_i - g \circ l_i \|_r \le \| u_i - l_i \|_r = \varepsilon ,$$

g Lipschitz mit Konstante 1

d.h., $[\tilde{l}_i, \tilde{u}_i]$ sind ε-Brackets.

4(d) Sei $r \geq 1$. Seien $[l_i, u_i]$ ε-Brackets bzgl. $\|\cdot\|_r$ für $\mathcal{F}$.
Dann sind $[l_i, u_i]$ auch ε-Brackets bzgl. $\|\cdot\|_1$ für $\mathcal{F}$, denn $\| u_i - l_i \|_1 \underset{\text{Hölder}}{\le} \| u_i - l_i \|_r \le \varepsilon$. $(i = 1, \dots, N)$.
$(\Rightarrow N_1(\varepsilon, \mathcal{F}, P) \le N_r(\varepsilon, \mathcal{F}, P))$

Sind die Fkt. aus $\mathcal{F}$ zusätzlich beschränkt durch eine Konstante $C > 0$, und sind $[l_i, u_i]$ ε-Brackets bzgl. $\|\cdot\|_1$ für $\mathcal{F}$, so gilt [es kann dann oBdA. angenommen werden, dass auch $|l_i|, |u_i| \le C$)

$$\| u_i - l_i \|_r = \mathbb{E}\left[|u_i - l_i|^r \right]^{1/r} = \mathbb{E}\left[|u_i - l_i| \cdot C^{r-1} \right]^{1/r}$$
$$= C^{\frac{r-1}{r}} \cdot \| u_i - l_i \|_1^{1/r} \le C^{\frac{r-1}{r}} \varepsilon^{1/r}$$

4(d) weiter:

Also $N_r(\tilde{\varepsilon}, \mathcal{F}, P) \leq N_1(\varepsilon, \mathcal{F}, P)$ mit $\tilde{\varepsilon} = C^{\frac{r-1}{r}} \varepsilon^{1/r}$

$$\Leftrightarrow \tilde{\varepsilon}^r = C^{r-1} \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tilde{\varepsilon}^r}{C^{r-1}} = \varepsilon$$

bzw.

$$N_r(\varepsilon, \mathcal{F}, P) \leq N_1\left(\frac{\varepsilon^r}{C^{r-1}}, \mathcal{F}, P\right)$$

4(b) $x_0 \in \mathbb{R}$

$\mathcal{F} = \{ a \cdot \mathbb{1}_{\{x_0\}} : a \in [-K, K] \}$. Definiere $f_a(x) = a \cdot \mathbb{1}_{\{x_0\}}(x)$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $a_i = -K + \varepsilon \cdot i$, $i = 0, \dots, N-1$

$a_N = K$ mit $N = \left\lfloor \frac{2K}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$

(Aufteilung y-Bereich)

$\Rightarrow [f_{a_i}, f_{a_{i+1}}]$, $i = 0, \dots, N-1$ sind Brackets für $\mathcal{F}$, denn für jedes $a \in [-K, K]$ gibt es $i \in \{0, \dots, N-1\}$ mit

$$a_i \leq a \leq a_{i+1}$$

$$\Rightarrow f_{a_i} \leq f_a \leq f_{a_{i+1}}$$

Es gilt außerdem

$$\| f_{a_{i+1}} - f_{a_i} \|_r = \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{1}_{\{x_0\}} \cdot \underbrace{|a_{i+1} - a_i|}_{\leq \varepsilon}\right)^r\right]^{1/r}$$

$$\leq \varepsilon \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{x_0\}}\right]}_{\leq 1}^{1/r} \leq \varepsilon,$$

d.h. $[f_{a_i}, f_{a_{i+1}}]$ sind ε-Brackets.

$$\Rightarrow N_r(\varepsilon, \mathcal{F}, P) \leq N = \left\lfloor \frac{2K}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \leq \frac{2K}{\varepsilon} + 1 \underset{\varepsilon < 1}{\leq} \frac{2K+1}{\varepsilon}$$