Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Abgabeblatt 9

Aufgabe A1 (Anwendung des OST, 4 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $W = (W_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Version der Brownschen Bewegung. Es sei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die kanonische Filtration von W, welche die üblichen Annahmen erfülle, und $X = (X_t)_{t\geq 0}$ gegeben durch

$$X_t := W_t^3 - 3\int_0^t W_s ds$$

Bekanntermaßen ist X ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Definiere für $a, b > 0$:

$$\tau_{a,b} := \inf\{t \geq 0 : W_t \notin (-a, b)\}.$$

Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^{\tau_{a,b}} W_s ds\Big] = \frac{1}{3}ab(b-a).$$

Hinweise:

- *Wenden Sie für $n \in \mathbb{N}$ das OST auf $\tau_{a,b} \wedge n$ an.*
- *Vom Präsenzblatt ist bekannt, dass $\mathbb{P}(W_{\tau_{a,b}} = -a) = \frac{b}{a+b} = 1 - \mathbb{P}(W_{\tau_{a,b}} = b)$.*
- *Nutzen Sie den Satz von der dominierten Konvergenz.*

Aufgabe A2 (Anwendung des OST 2, 6 = 2 + 3 + 1 Punkte).

Sei $W = (W_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine stetige Version einer Brownschen Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Es sei $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ mit $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s \leq t)$ die zugehörige kanonische Filtration, von welcher angenommen werde, dass sie rechtsstetig ist. Es sei $b > 0$ und $\tau_b := \inf\{t \geq 0 : W_t = b\}$.

(a) Zeigen Sie, dass τ_b die gleiche Verteilung hat wie $b^2\tau_1$.
Hinweis: Nutzen Sie die Skalierungsinvarianz der Brownschen Bewegung, Präsenzblatt 1, P4(b).

(b) Zeigen Sie, dass $\tau_b < \infty$ f.s.
Hinweis: Wenden Sie das OST auf das bekannte Martingal $X_t = \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t)$ und $\tau_b \wedge n$ an. Schreiben Sie innerhalb des Erwartungswerts $1 = \mathbb{1}_{\{\tau_b<\infty\}} + \mathbb{1}_{\{\tau_b=\infty\}}$ und führen Sie dann die Grenzübergänge $n \to \infty$, $\sigma \to \infty$ durch.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[e^{-\lambda\tau_b}] = e^{-b\sqrt{2\lambda}}$ für $\lambda > 0$.

Aufgabe A3 (Doob-Ungleichung für Momente, $6 = 1 + 2 + 2 + 1$ Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiges Submartingal bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, welche die üblichen Annahmen erfüllt. Sei

$$Z_t = \sup_{s\in[0,t]} X_s.$$

Sei $p > 1$. Zeigen Sie die Doob-Ungleichung für Momente,

$$\mathbb{E}[|Z_t|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|X_t|^p].$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Begründen Sie, dass auch $|X_t|$ ein Submartingal ist.
Hinweis: Jensen-Ungleichung.

(b) Sei $M \in \mathbb{N}$ fest. Zeigen Sie mit Hilfe der Doob-Ungleichung für Wahrscheinlichkeiten, dass $\mathbb{P}(Z_t \wedge M > x) \leq \mathbb{E}[|X_t|\mathbb{1}_{\{Z_t\wedge M > x\}}]$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[(Z_t \wedge M)^p] \leq \frac{p}{p-1}\mathbb{E}[|X_t|^p]^{1/p} \cdot \mathbb{E}[(Z_t \wedge M)^p]^{\frac{p-1}{p}}$.
Hinweis: Nutzen Sie die Form $\mathbb{E}[Y^p] = p\int_0^\infty y^{p-1}\mathbb{P}(Y > x)dx$ für Zufallsvariablen $Y \geq 0$ und (b), sowie die Hölder-Ungleichung.

(d) Folgern Sie aus (c) die Doob-Ungleichung für Momente.

Aufgabe A4 (Lokale Martingale, 4 Bonuspunkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(M_t)_{t\geq 0}$ ein nicht-negatives stetiges lokales Martingal bzgl einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, welche die üblichen Annahmen erfüllt. Zeigen Sie: Gilt

$$\forall t \geq 0: \quad \mathbb{E}M_t = \mathbb{E}M_0 < \infty,$$

dann ist $(M_t)_{t\geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingal.

Abgabe bis Donnerstag 19:00 Uhr, 29.06.2023, im Zettelkasten 01 im Mathematikon INF205, 1. Etage.
Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`