Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Abgabeblatt 8

Aufgabe A1 (Anwendung der Hadamard-Differerenzierbarkeit, 6 = 4 + 2 Punkte).
Sei $VF([-\infty,\infty])$ die Menge der Verteilungsfunktionen auf $[-\infty,\infty]$. Betrachten Sie die Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \times VF([-\infty,\infty]) \to l^\infty([-\infty,\infty])$ gegeben durch

$$(\theta, F) \mapsto G(s) := \Phi(\theta, F)(s) = \frac{1}{2}\Big(F(s) + 1 - F(2\theta - s)\Big).$$

Sei ferner $\mathbb{D}_0 := \mathbb{R} \times UC([-\infty,\infty])$ der Raum der gleichmäßig stetigen Funktionen auf $[-\infty,\infty]$. Zeigen Sie:

(a) Ist F zweimal differenzierbar mit beschränkten Ableitungen und $\theta \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist Φ Hadamard-differenzierbar in (θ, F) tangential zu $\mathbb{D}_0$.

(b) Betrachten Sie nun eine iid Stichprobe $X_1, ..., X_n$ mit einer Verteilungsfunktion F wie in (a), mit $\mathbb{E}X^2 < \infty$ und $\mu = \mathbb{E}X$. Betrachten Sie den Schätzer

$$\hat{G}_n(s) := \frac{1}{2}\Big(\hat{F}_n(s) + 1 - \hat{F}_n(2\overline{X_n} - s)\Big),$$

wobei $\hat{F}_n$ die empirische Verteilungsfunktion und $\overline{X_n}$ das arithmetische Mittel von $X_1, ..., X_n$ bezeichnen. Leiten Sie die asymptotische Verteilung von $\sqrt{n}(\hat{G}_n - \Phi(\mu, F))$ in $l^\infty([-\infty,\infty])$ her.

Bemerkung: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass

$$\Big(\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu), \sqrt{n}(\hat{F}_n - F)\Big) \xrightarrow{D} (N, \mathbb{B}_F) \quad \text{ in } \mathbb{R} \times l^\infty([-\infty,\infty]),$$

wobei der Grenzwert in $\mathbb{R} \times UC([-\infty,\infty], |\cdot|)$ liegt. Hierbei bezeichnet $\mathbb{B}_F$ den Prozess $t \mapsto \mathbb{B}_{F(t)}$ mit einer Brownschen Brücke $(\mathbb{B}_t)_{t\in[0,1]}$ und N eine $N(0, Var(X_1))$-verteilte Zufallsvariable mit $Cov(N, \mathbb{B}_F(s)) = Cov(X_1, \mathbb{1}_{\{X_1 \le s\}})$.

Aufgabe A2 (Martingaleigenschaften von Funktionalen der Brownschen Bewegung, 6 Punkte).
Sei $W = (W_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Es sei $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ mit $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s \le t)$ die zugehörige kanonische Filtration. Zeigen Sie, dass die folgenden Ausdrücke Martingale bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ sind:

(a) $W_t^4 - 6tW_t^2 + 3t^2$

(b) $tW_t - \int_0^t W_s ds$

Aufgabe A3 (Eigenschaften von Stoppzeiten, 4 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration.

(a) Zeigen Sie: Sind τ_1, τ_2 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeiten, so sind auch $\tau_1 + \tau_2$ und $\tau_1 \wedge \tau_2$ $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeiten.
Hinweis für $\tau_1 + \tau_2$: Es ist $\{\tau_1 + \tau_2 > t\} = \{\tau_1 = 0, \tau_1 > t\} \cup \{\tau_1 = t, \tau_1 > 0\} \cup \{\tau_1 > t\} \cup \{\tau_1 \in (0,t), \tau_1 + \tau_2 > t\}$. Stellen Sie nun noch die letzte Menge als Vereinigung abzählbarer vieler $\mathcal{F}_t$-messbarer Mengen dar.

(b) Sei τ eine $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Stoppzeit. Zeigen Sie, dass die Sigma-Algebra τ-Vergangenheit

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{A} : \forall t \geq 0 : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

ihren Namen verdient, also eine Sigma-Algebra ist.

Abgabe bis Donnerstag 11:00 Uhr, 22.06.2023, im Zettelkasten 01 im Mathematikon INF205, 1. Etage.
Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`