Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Abgabeblatt 6

Aufgabe A1 (Hoeffding-Ungleichung, 6 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{X}, d)$ ein metrischer Raum und $X_i : \Omega \to \mathcal{X}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen. Sei $\mathcal{F} = \{f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \text{ messbar}\}$ mit der Eigenschaft, dass ein $M > 0$ existiert, so dass

$$\forall f \in \mathcal{F}: \quad \|f\|_\infty \leq M.$$

Zeigen Sie, dass für alle $x > 0$ und $f \in \mathcal{F}$ gilt:

$$\mathbb{P}(\mathbb{G}_n(f) > x) \leq \exp\Big(-\frac{x^2}{8M^2}\Big).$$

und

$$\mathbb{P}(|\mathbb{G}_n(f)| > x) \leq 2\exp\Big(-\frac{x^2}{8M^2}\Big).$$

Hinweise:

- *Gehe Sie ähnlich vor wie beim Beweis der Bernstein-Ungleichung. Wenden Sie zunächst die Markov-Ungleichung mit $g(x) = e^{\lambda x}$ an und definieren Sie $Y_i := f(X_i) - \mathbb{E}f(X_i)$.*
- *Nutzen Sie dann die Konvexität der Exponentialfunktion, mit geeignetem c,*

$$e^{cY_i} = e^{\frac{Y_i - 2M}{2}c + \frac{Y_i + 2M}{2}c} \leq \frac{2M - Y_i}{4M}e^{-2cM} + \frac{Y_i + 2M}{4M}e^{2cM}.$$

- *Schätzen Sie damit $\mathbb{E}e^{cY_1}$ nach oben durch einen Term der Form*

$$e^{L(u,z)}, \qquad \textit{mit} \qquad L(u,z) = -uz + \log((1-z) + ze^u)$$

  mit geeigneten $u, z > 0$ ab. Zeigen Sie, dass $L(u,z) \leq \frac{u^2}{8}$ für alle $z > 0$.
- *Optimieren Sie die obere Schranke bzgl. $\lambda > 0$.*

Aufgabe A2 (Maximalungleichung mit Hoeffding-Ungleichung, 6 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{X}, d)$ ein metrischer Raum und $X_i : \Omega \to \mathcal{X}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen. Sei $\mathcal{F} = \{f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \text{ messbar}\}$ mit der Eigenschaft, dass ein $M > 0$ existiert, so dass

$$\forall f \in \mathcal{F}: \quad \|f\|_\infty \leq M.$$

Sei $\mathcal{F}$ endlich. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1, dass

$$\mathbb{E}\max_{f \in \mathcal{F}} |\mathbb{G}_n(f)| \lesssim M\sqrt{\log(|\mathcal{F}| + 1)}$$

Hinweis: Gehen Sie vor wie in Lemma 1.67. Für das konvexe und monoton wachsende $\psi_2(x) = e^{x^2} - 1$, betrachten Sie

$$\mathbb{E}\psi_2\Big(\frac{|\mathbb{G}_n(f)|}{4M}\Big)$$

und schätzen Sie dies geeignet nach oben ab.

Aufgabe A3 (Bonus: Satz von Glivenko-Cantelli, 4 Bonuspunkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{X}, d)$ ein metrischer Raum und $X_i : \Omega \to \mathcal{X}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen. Sei $\mathcal{F} = \{f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \text{ messbar}\}$ mit der Eigenschaft, dass $\mathbb{E}|f(X_1)| < \infty$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und $N_1(\varepsilon, \mathcal{F}, \mathbb{P}^{X_1}) < \infty$ für alle $\varepsilon > 0$.

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) - \mathbb{E}f(X_i)\Big| = \sup_{f\in\mathcal{F}}|\hat{P}_n f - Pf| \to 0 \quad \text{f.s.}$$

Hinweis:

- *Für $\varepsilon > 0$ und entsprechende ε-Brackets $[l_j, u_j]$ ($j = 1, ..., N$) mit $\|u_l - l_j\|_1 \leq \varepsilon$, schreiben Sie*

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}|\hat{P}_n f - Pf| = \max_{j=1,\dots,N}\ \sup_{f\in[l_j,u_j]}|\hat{P}_n f - Pf|$$

- *Zeigen Sie, dass $f \in [l_j, u_j]$:*

$$|\hat{P}_n f - Pf| \leq \hat{P}_n|u_j - l_j| + \big|\hat{P}_n l_j - Pl_j\big| + \varepsilon.$$

- *Wenden Sie das normale starke Gesetz der großen Zahlen bei den obigen Termen an.*

Abgabe bis Mittwoch 19:00 Uhr, 07.06.2023, im Zettelkasten 01 im Mathematikon INF205, 1. Etage.
Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`