Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Abgabeblatt 5 - Lösungen

Aufgabe A1 (Abschätzung von Bracketing-Zahlen, 6 Punkte).
Es sei $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $r \geq 1$. Sei $\mathcal{F} = \{f_\theta : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \text{ messbar}, \theta \in \Theta\}$ eine Klasse messbarer Funktionen, indiziert durch $\Theta \subset \mathbb{R}^d$, so dass

$$\operatorname{diam}(\Theta) = \sup_{\theta_1, \theta_2 \in \Theta} \|\theta_1 - \theta_2\| < \infty.$$

(Dies nennt man auch parametrische Lipschitz-Klasse).
Ferner existiere eine messbare Funktion $m : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ mit $\|m\|_r = (\int m(x)^r dP(x))^{1/r} < \infty$, so dass

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall \theta_1, \theta_2 \in \Theta : \qquad |f_{\theta_1}(x) - f_{\theta_2}(x)| \leq m(x) \cdot \|\theta_1 - \theta_2\|$$

Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$.

Zeigen Sie: Dann existiert eine Konstante $K = K(\Theta, d)$, so dass

$$\forall \varepsilon \in (0, \operatorname{diam}(\Theta)) : \quad N_r(\varepsilon\|m\|_r, \mathcal{F}, P) \leq K \left(\frac{\operatorname{diam}(\Theta)}{\varepsilon}\right)^d.$$

Hinweis: Überdecke Θ durch Bälle mit Mittelpunkten θ_j und wähle dann Brackets der Form $[f_{\theta_j} - m \cdot \frac{\varepsilon}{2}, f_{\theta_j} + m \cdot \frac{\varepsilon}{2}]$.
Lösung: Wähle zunächst $\theta_1, ..., \theta_M$ so, dass

$$\Theta \subset \bigcup_{j=1}^{M} \bar{B}_{\varepsilon\sqrt{d}/2}(\theta_j) \qquad (*)$$

(dies geht, weil $\operatorname{diam}(\Theta) < \infty$ und somit Θ Teilmenge einer kompakten Menge ist). Hierbei bezeichnet $\bar{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| \leq r\}$ den abgeschlossenen Ball mit Radius r um x. Detaillierter:

Sei $\theta_0 \in \Theta$ beliebig. Dann gilt für alle $\theta \in \Theta$: $\|\theta - \theta_0\| \leq \operatorname{diam}(\Theta)$, also

$$\Theta \subset \bar{B}_{\operatorname{diam}(\Theta)}(\theta_0) \subset \prod_{j=1}^{d} [\theta_{0j} - \operatorname{diam}(\Theta), \theta_{0j} + \operatorname{diam}(\Theta)].$$

Die rechte Seite ist ein Würfel, welcher offensichtlich durch insgesamt $M = (\frac{2}{\varepsilon})^d$ kleine Würfel der Form $\bar{B}^{\infty}_{\varepsilon/2}(\theta_k) = \prod_{j=1}^{d} [\theta_{kj} - \frac{\varepsilon}{2}, \theta_{kj} + \frac{\varepsilon}{2}]$ mit Mittelpunkten $\theta_k \in \mathbb{R}^d$ überdeckt werden kann. In $\mathbb{R}^d$ gilt für die Maximum-Norm:

$$\|x\| \leq \sqrt{d}\|x\|_\infty.$$

Damit ist

$$\bar{B}^{\infty}_{\varepsilon/2}(\theta_k) \subset \bar{B}_{\varepsilon\sqrt{d}/2}(\theta_k)$$

Es kann also $M = (\frac{2}{\varepsilon})^d$ in (*) gewählt werden.
Setze nun für $j = 1, ..., M$, $k = 1, ..., d$

$$l_{jk}(x) = f_{\theta_j^{(k)}}(x) - m(x)\frac{\varepsilon\sqrt{d}}{2}, \quad u_{jk}(x) = f_{\theta_j^{(k)}}(x) + m(x)\frac{\varepsilon\sqrt{d}}{2}.$$

Dann gilt

$$(i) \quad \|u_j - l_j\|_r = \varepsilon\sqrt{d}\|m\|_r, \qquad (ii) \quad \mathcal{F} \subset \bigcup_{j=1}^{M} [l_j, u_j].$$

Es folgt dann

$$N_r(\varepsilon\sqrt{d}\|m\|_r, \mathcal{F}, P) \leq M = (\frac{2}{\varepsilon})^d.$$

Durch Substitution folgt $N_r(\varepsilon\|m\|_r, \mathcal{F}, P) \leq M = (\frac{2\sqrt{d}}{\varepsilon})^d$.

Es ist (i) offensichtlich, und (ii) folgt, indem wir zunächst zu beliebigem f_θ ein θ_j wählen mit $\|\theta - \theta_j\| \leq \frac{\varepsilon\sqrt{d}}{2}$. Wegen der Lipschitz-Bedingung erhalten wir dann

$$f_\theta(x) = f_{\theta_j}(x) + \Big(f_\theta(x) - f_{\theta_j}(x)\Big) \leq f_{\theta_j}(x) + m(x)\frac{\varepsilon\sqrt{d}}{2} = u_j(x),$$

und analog $f_\theta(x) \geq f_{\theta_j}(x) - m(x)\frac{\varepsilon\sqrt{d}}{2} = l_j(x)$. Also gilt $f_\theta \in [l_j, u_j]$.

Aufgabe A2 (Bracketing-Zahlen für weitere Funktionenklassen, 4 Punkte).
Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \{f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \text{ messbar}\}$ sowie $1 \leq r < \infty$. Weiter seien alle $f \in \mathcal{F}$ und $g \in \mathcal{G}$ durch eine Konstante $C > 0$ beschränkt. Definiere

$$\mathcal{F}\mathcal{G} = \{f \cdot g : f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$N_r(\varepsilon, \mathcal{F}\mathcal{G}, P) \leq 4N_r(k(C)\varepsilon, \mathcal{F}, P) \cdot N_r(k(C)\varepsilon, \mathcal{G}, P),$$

wobei $k(C)$ eine nur von C abhängige Konstante ist.

Lösung: Sei $N_1 := N_r(k(C)\varepsilon, \mathcal{F}, P)$, $N_2 := N_r(k(C)\varepsilon, \mathcal{G}, P)$ und $l_j^{(1)}, u_j^{(1)}$ $(j = 1, ..., N_1)$ bzw. $l_k^{(2)}, u_k^{(2)}$ $(k = 1, ..., N_2)$ die Grenzen der Brackets mit

$$\forall j \in \{1, ..., N_1\} : \quad \|u_j^{(1)} - l_j^{(1)}\|_r \leq k(C)\varepsilon, \qquad \forall k \in \{1, ..., N_2\} : \quad \|u_k^{(2)} - l_k^{(2)}\|_r \leq k(C)\varepsilon$$

und

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{j=1}^{N_1} [l_j^{(1)}, u_j^{(1)}], \qquad \mathcal{G} \subset \bigcup_{k=1}^{N_2} [l_k^{(2)}, u_k^{(2)}].$$

Die Funktion $k(C)$ definieren wir später geeignet. Zunächst stellen wir fest, dass wir wegen der gleichmäßigen Beschränktheit von $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ annehmen können, dass auch $l_j^{(i)}, u_j^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ diese Eigenschaft besitzen (definiere sonst neue $L_j^{(i)} := \max(-C, l_j^{(i)}) \geq l_j^{(i)}$ bzw. $U_j^{(i)} := \min(C, u_j^{(i)}) \leq u_j^{(i)}$, wodurch die Brackets kleiner werden).

Teil 1: Sind nun l_1, l_2, u_1, u_2, f, g gleichmäßig durch C beschränkte Funktionen mit

$$l_1 \leq f \leq u_1, \qquad l_2 \leq g \leq u_2, \tag{1}$$

so folgt

$$\begin{array}{lllll} & 0 \leq l_1 + C \leq f + C \leq u_1 + C, & & 0 \leq l_2 + C \leq g + C \leq u_2 + C & \\ \Rightarrow & (l_1 + C)(l_2 + C) & \leq & (f + C)(g + C) \quad \leq \quad (u_1 + C)(u_2 + C) & \\ \Rightarrow & l_1 l_2 + C(l_1 + l_2) & \leq & fg + C(f + g) \quad \leq \quad u_1 u_2 + C(u_1 + u_2) & \\ \Rightarrow & l := l_1 l_2 + C((l_1 + l_2) - (u_1 + u_2)) & \leq & fg \quad \leq \quad u_1 u_2 + C((u_1 + u_2) - (l_1 + l_2)) =: u, & \end{array}$$

wobei wir im letzten Schritt die Ungleichungen aus (1) mit $(-C)$ multipliziert auf die vorherige Ungleichung addiert haben.

Teil 2: Für die neu definierten Funktionen l, u gilt:

$$\begin{aligned} \|u - l\|_r &= \Big\| \Big[u_1(u_2 - l_2) + l_2(u_1 - l_1) \Big] + 2C \Big[(u_1 - l_1) + (u_2 - l_2) \Big] \Big\|_r \\ &\leq \underbrace{\|u_1(u_2 - l_2)\|_r}_{\overset{|u_1| \leq C}{\leq} C\|u_2 - l_2\|_r} + \underbrace{\|l_2(u_1 - l_1)\|_r}_{\overset{|l_2| \leq C}{\leq} C\|u_1 - l_1\|_r} + 2C \cdot \Big(\|u_1 - l_1\|_r + \|u_2 - l_2\|_r \Big) \\ &\leq 3C \cdot \Big(\|u_1 - l_1\|_r + \|u_2 - l_2\|_r \Big). \end{aligned}$$

Definieren wir also jeweils $N_1 \cdot N_2$ neue Funktionen ($j = 1, ..., N_1, k = 1, ..., N_2$)

$$\begin{aligned} l_{j,k} &:= l_j^{(1)} l_k^{(2)} + C\Big((l_j^{(1)} + l_k^{(2)}) - (u_j^{(1)} + u_k^{(2)}) \Big), \\ u_{j,k} &:= u_j^{(1)} u_k^{(2)} - C\Big((l_j^{(1)} + l_k^{(2)}) - (u_j^{(1)} + u_k^{(2)}) \Big), \end{aligned}$$

so überdecken die zugehörigen Brackets wegen Teil 1 ganz $\mathcal{FG}$, und wegen Teil 2 gilt

$$\begin{aligned} \|u_{j,k} - l_{j,k}\|_r &\leq 3C\Big(\|u_j^{(1)} - l_j^{(1)}\|_r + \|u_k^{(2)} - l_k^{(2)}\|_r \Big) \\ &\leq 3C\Big(k(C)\varepsilon + k(C)\varepsilon \Big) \\ &= 6Ck(C)\varepsilon, \end{aligned}$$

d.h. mit $k(C) := \frac{1}{6C}$ ist der Ausdruck $\leq \varepsilon$. Das heißt, es genügen die $N_1 \cdot N_2$ definierten Brackets $[l_{j,k}, u_{j,k}]$, und es folgt

$$N_r(\varepsilon, \mathcal{FG}, P) \leq N_1 \cdot N_2.$$

Aufgabe A3 (Anwendung des Satzes von Donsker für empirische Prozesse, 8 = 4 + 4 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_i : \Omega \to \mathcal{X} = \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen.

(a) Es gelte $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\Big[\sqrt{n} \Big(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu| - \mathbb{E}|X_1 - \mu| \Big) \Big]_{\mu \in [-1,1]} \xrightarrow{D} \mathbb{G} \quad \text{in} \quad (\ell^\infty[-1,1], \|\cdot\|_{\infty,[-1,1]}),$$

wobei $\mathbb{G} = (\mathbb{G}(\mu))_{\mu\in[-1,1]}$ ein zentrierter Gauß-Prozess mit zu bestimmender Kovarianzfunktion ist.
Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 1, das heißt, zeigen Sie, dass hier die Funktionenklasse eine parametrische Lipschitz-Klasse bildet. Insbesondere ist zu zeigen, dass das zugehörige Entropie-Integral $J_2(1, \mathcal{F}, \mathbb{P}^{X_1})$ endlich ist.

(b) Es gelte $E[X_1^4] < \infty$. Es werde nun eine Maximum-Likelihood-Schätzung durch eine Normalverteilung durchgeführt, das heißt, es sei $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = [-M, M] \times [\sigma_0^2, \sigma_1^2]$ mit festen $M, \sigma_1^2, \sigma_0^2 > 0$ und $l_\theta(x) = \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} + \log(\sigma^2)$. Zeigen Sie, dass

$$\Big[\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n l_\theta(X_i) - \mathbb{E}l_\theta(X_1)\Big)\Big]_{\theta\in\Theta} \xrightarrow{D} \mathbb{G} \quad \text{in} \quad (\ell^\infty(\Theta), \|\cdot\|_{\infty,\Theta}),$$

wobei $\mathbb{G}$ ein zentrierter Gauß-Prozess ist (hier muss die Kovarianzfunktion nicht angegeben werden).
Hinweis: Aufgabe 1.

Lösung:

(a) Betrachte die Funktionenklasse

$$\mathcal{F} = \{f_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_\mu(x) = |x - \mu| : \mu \in [-1, 1]\}.$$

Dann gilt

$$(\mathbb{G}_n(f))_{f\in\mathcal{F}} = (\mathbb{G}_n(f_\mu))_{\mu\in[-1,1]} = \Big[\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_i - \mu| - \mathbb{E}|X_1 - \mu|\Big)\Big]_{\mu\in[-1,1]}$$

Es gilt für festes $x \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} \sup_{f\in\mathcal{F}} |f(x) - Pf| &= \sup_{\mu\in[-1,1]} |f_\mu(x) - Pf_\mu| \\ &\le \sup_{\mu\in[-1,1]} |x-\mu| + \sup_{\mu\in[-1,1]} \mathbb{E}|X_1 - \mu| \\ &\le |x| + 1 + \mathbb{E}|X_1| + 1 < \infty, \end{aligned}$$

da $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$.

Die Klasse $\mathcal{F}$ ist eine Lipschitz-Klasse, denn für $\mu, \mu' \in [-1, 1]$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|f_\mu(x) - f_{\mu'}(x)| = \big||x-\mu| - |x-\mu'|\big| \le \big|(x-\mu) - (x-\mu')\big| = |\mu - \mu'| = m(x)\cdot|\mu-\mu'|,$$

mit $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, m(x) = 1$. Es ist außerdem $\|m\|_2 = \|1\|_2 = 1$. Mit Aufgabe 1 folgt mit einer Konstanten $K > 0$:

$$N_2(\varepsilon, \mathcal{F}, P) \le K \cdot \frac{\mathrm{diam}([-1,1])}{\varepsilon} = \frac{2K}{\varepsilon}.$$

Es folgt (mit $a \vee b = \max\{a,b\}$ und $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$):

$$\begin{aligned} J_2(1, \mathcal{F}, P) &= \int_0^1 \sqrt{1 \vee \log N_2(\varepsilon, \mathcal{F}, P)} d\varepsilon = \int_0^1 \sqrt{1 \vee (\log(2K) - \log(\varepsilon))} d\varepsilon \\ &\leq \sqrt{\log(2K)} + \int_0^1 \sqrt{\log(1 + \frac{1}{\varepsilon})} d\varepsilon \\ &\overset{\log(1+x) \leq x}{\leq} \sqrt{\log(2K)} + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} d\varepsilon \\ &\leq \sqrt{\log(2K)} + \Big[2\sqrt{\varepsilon}\Big]_0^1 = \sqrt{\log(2K)} + 2 < \infty. \end{aligned}$$

Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von Donsker 1.64 erfüllt und es folgt, dass es eine straffe Zufallsvariable $\mathbb{G}$ mit Werten in $\ell^\infty(\mathcal{F})$ gibt mit

$$\mathbb{G}_n \xrightarrow{D} \mathbb{G}.$$

Es folgt:

$$\Big[\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_i - \mu| - \mathbb{E}|X_1 - \mu|\Big)\Big]_{\mu \in [-1,1]} \xrightarrow{D} (\mathbb{G}(f_\mu))_{\mu \in [-1,1]} \qquad \text{in} \quad \ell^\infty[-1,1].$$

$\mathbb{G}$ ist ein zentrierter Gauß-Prozess, denn wegen dem zentralen Grenzwertsatz (es ist $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$) gilt für $\mu_1, ..., \mu_k \in [-1,1]$:

$$\big(\mathbb{G}_n(f_{\mu_1}), ..., \mathbb{G}_n(f_{\mu_k})\big) \xrightarrow{D} N(0, \Sigma),$$

was den Verteilungen von $\big(\mathbb{G}(f_{\mu_1}), ..., \mathbb{G}(f_{\mu_k})\big)$ entsprechen muss. Die Kovarianzfunktion ist

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{G}(f_{\mu_1}), \mathbb{G}(f_{\mu_2})) = \mathrm{Cov}(|X_1 - \mu_1|, |X_2 - \mu_2|).$$

(b) Betrachte die Funktionenklasse

$$\mathcal{F} = \{l_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \theta \in \Theta\}.$$

Dann gilt

$$(\mathbb{G}_n(f))_{f \in \mathcal{F}} = (\mathbb{G}_n(l_\theta))_{\theta \in \Theta} = \Big[\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n l_\theta(X_i) - \mathbb{E} l_\theta(X_1)\Big)\Big]_{\theta \in \Theta}.$$

Es gilt für festes $x \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x) - Pf| &= \sup_{\theta \in \Theta} |l_\theta(x) - P l_\theta| \\ &\leq \sup_{(\mu, \sigma^2) = \theta \in \Theta} \Big(\frac{2x^2 + 2\mu^2}{\sigma^2} + |\log(\sigma^2)|\Big) \\ &\qquad + \sup_{(\mu, \sigma^2) = \theta \in \Theta} \Big(\frac{1}{\sigma^2}(2\mathbb{E}[X_1^2] + 2\mu^2) + |\log(\sigma^2)|\Big) \\ &\leq \frac{1}{\sigma_0^2}(2x^2 + 2M^2) + 2\max\{\log(\sigma_0^2), \log(\sigma_1^2)\} + \frac{1}{\sigma_0^2}(2\mathbb{E}[X_1^2] + 2M^2) < \infty \end{aligned}$$

da $\mathbb{E}[X_1^4] < \infty$.

Die Klasse $\mathcal{F}$ ist eine Lipschitz-Klasse, denn für $(\mu, \sigma^2) = \theta, (\mu', (\sigma')^2) = \theta' \in \Theta$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt (beachte: $\log(\cdot)$ ist Lipschitz-stetig mit Konstante $L = 1$ Argumente $x \geq 1$):

$$\begin{aligned}
|l_\theta(x) - l_{\theta'}(x)| &= \Big|\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} + \log(\sigma^2) - \frac{(x-\mu')^2}{(\sigma')^2} - \log((\sigma')^2)\Big| \\
&\leq \Big|\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{(\sigma')^2}\Big| + \frac{1}{(\sigma')^2}\big|(x-\mu)^2 - (x-\mu')^2\big| + \underbrace{\Big|\log(\sigma^2) - \log((\sigma')^2)\Big|}_{=|\log(\sigma^2/\sigma_0^2) - \log((\sigma')^2/\sigma_0^2)|} \\
&\leq \frac{|\sigma^2 - (\sigma')^2|}{\sigma^2(\sigma')^2} + \frac{1}{(\sigma')^2}\big(2|x| \cdot |\mu - \mu'| + \underbrace{|\mu^2 - (\mu')^2|}_{=|\mu-\mu'|\cdot|\mu+\mu'| \leq 2M|\mu-\mu'|}\big) + \Big|\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} - \frac{(\sigma')^2}{\sigma_0^2}\Big| \\
&\leq \Big[\frac{1}{\sigma_0^4} + \frac{1}{\sigma_0^2}\Big] \cdot |\sigma^2 - (\sigma')^2| + \frac{2}{\sigma_0^2}|x| \cdot |\mu - \mu'| + \frac{2M}{\sigma_0^2}|\mu - \mu'| \\
&\leq \Big[\frac{1}{\sigma_0^4} + \frac{1+2M}{\sigma_0^2} + \frac{2}{\sigma_0^2}|x|\Big] \cdot \underbrace{\Big\{|\sigma^2 - (\sigma')^2| + |\mu - \mu'|\Big\}}_{\leq \sqrt{2}\|(\mu,\sigma^2) - (\mu', (\sigma')^2)\|},
\end{aligned}$$

das heißt, man kann $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, m(x) = \sqrt{2} \cdot (\frac{1}{\sigma_0^4} + \frac{1+2M}{\sigma_0^2} + \frac{2}{\sigma_0^2}|x|)$ wählen. Es ist dann

$$\|m\|_2 = C(\sigma_0, M, \mathbb{E}[X_1^2]) < \infty.$$

Weiter ist $\operatorname{diam}(\Theta) \leq 2M \cdot (\sigma_1^2 - \sigma_0^2)$. Mit Aufgabe 1 folgt mit einer Konstanten $K > 0$:

$$N_2(\varepsilon, \mathcal{F}, P) \leq K \cdot \Big(\frac{C \cdot 2M(\sigma_1^2 - \sigma_0^2)}{\varepsilon}\Big)^2 = \frac{C'}{\varepsilon^2}$$

mit entsprechend definiertem C'.
Es folgt (mit $a \vee b = \max\{a, b\}$ und $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$):

$$\begin{aligned}
J_2(1, \mathcal{F}, P) &= \int_0^1 \sqrt{1 \vee \log N_2(\varepsilon, \mathcal{F}, P)}d\varepsilon = \int_0^1 \sqrt{1 \vee (\log(C') - 2\log(\varepsilon))}d\varepsilon \\
&\leq \sqrt{\log(C')} + \int_0^1 \sqrt{2\log(1 + \frac{1}{\varepsilon})}d\varepsilon \\
&\overset{\log(1+x) \leq x}{\leq} \sqrt{\log(C')} + \sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}d\varepsilon \\
&\leq \sqrt{\log(C')} + \Big[2\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon}\Big]_0^1 = \sqrt{\log(2K)} + 2\sqrt{2} < \infty.
\end{aligned}$$

Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von Donsker 1.64 erfüllt und es folgt, dass es eine straffe Zufallsvariable $\mathbb{G}$ mit Werten in $\ell^\infty(\mathcal{F})$ gibt mit

$$\mathbb{G}_n \xrightarrow{D} \mathbb{G}.$$

Es folgt:

$$\Big[\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n l_\theta(X_i) - \mathbb{E}l_\theta(X_1)\Big)\Big]_{\theta\in\Theta} \xrightarrow{D} (\mathbb{G}(l_\theta))_{\theta\in\Theta} \qquad \text{in} \quad \ell^\infty(\Theta).$$

$\mathbb{G}$ ist ein zentrierter Gauß-Prozess, denn wegen dem zentralen Grenzwertsatz (es ist $\mathbb{E}[X_1^4] < \infty$) gilt für $\theta_1, ..., \theta_k \in \Theta$:

$$\big(\mathbb{G}_n(l_{\theta_1}), ..., \mathbb{G}_n(l_{\theta_k})\big) \xrightarrow{D} N(0, \Sigma),$$

was den Verteilungen von $\big(\mathbb{G}(l_{\theta_1}), ..., \mathbb{G}(l_{\theta_k})\big)$ entsprechen muss.

Abgabe bis Donnerstag 19:00 Uhr, 01.06.2023, im Zettelkasten 01 im Mathematikon INF205, 1. Etage.
Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`