Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Abgabeblatt 5

Aufgabe A1 (Abschätzung von Bracketing-Zahlen, 6 Punkte).
Es sei $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $r \geq 1$. Sei $\mathcal{F} = \{f_\theta : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \text{ messbar}, \theta \in \Theta\}$ eine Klasse messbarer Funktionen, indiziert durch $\Theta \subset \mathbb{R}^d$, so dass

$$\operatorname{diam}(\Theta) = \sup_{\theta_1, \theta_2 \in \Theta} \|\theta_1 - \theta_2\| < \infty.$$

(Dies nennt man auch parametrische Lipschitz-Klasse).
Ferner existiere eine messbare Funktion $m : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ mit $\|m\|_r = (\int m(x)^r dP(x))^{1/r} < \infty$, so dass

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall \theta_1, \theta_2 \in \Theta : \qquad |f_{\theta_1}(x) - f_{\theta_2}(x)| \leq m(x) \cdot \|\theta_1 - \theta_2\|$$

Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$.

Zeigen Sie: Dann existiert eine Konstante $K = K(\Theta, d)$, so dass

$$\forall \varepsilon \in (0, \operatorname{diam}(\Theta)) : \quad N_r(\varepsilon \|m\|_r, \mathcal{F}, P) \leq K \left(\frac{\operatorname{diam}(\Theta)}{\varepsilon} \right)^d.$$

Hinweis: Überdecke Θ durch Bälle mit Mittelpunkten θ_j und wähle dann Brackets der Form $[f_{\theta_j} - m \cdot \frac{\varepsilon}{2}, f_{\theta_j} + m \cdot \frac{\varepsilon}{2}]$.

Aufgabe A2 (Bracketing-Zahlen für weitere Funktionenklassen, 4 Punkte).
Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \{f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \text{ messbar}\}$ sowie $1 \leq r < \infty$. Weiter seien alle $f \in \mathcal{F}$ und $g \in \mathcal{G}$ durch eine Konstante $C > 0$ beschränkt. Definiere

$$\mathcal{F}\mathcal{G} = \{f \cdot g : f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$N_r(\varepsilon, \mathcal{F}\mathcal{G}, P) \leq 4 N_r(k(C)\varepsilon, \mathcal{F}, P) \cdot N_r(k(C)\varepsilon, \mathcal{G}, P),$$

wobei $k(C)$ eine nur von C abhängige Konstante ist.

Aufgabe A3 (Anwendung des Satzes von Donsker für empirische Prozesse, 8 = 4 + 4 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_i : \Omega \to \mathcal{X} = \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen.

(a) Es gelte $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\left[\sqrt{n} \Big(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu| - \mathbb{E}|X_1 - \mu| \Big) \right]_{\mu \in [-1,1]} \xrightarrow{D} \mathbb{G} \quad \text{in} \quad (\ell^\infty[-1,1], \|\cdot\|_{\infty,[-1,1]}),$$

wobei $\mathbb{G} = (\mathbb{G}(\mu))_{\mu \in [-1,1]}$ ein zentrierter Gauß-Prozess mit zu bestimmender Kovarianzfunktion ist.
Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 1, das heißt, zeigen Sie, dass hier die Funktionenklasse eine parametrische Lipschitz-Klasse bildet. Insbesondere ist zu zeigen, dass das zugehörige Entropie-Integral $J_2(1, \mathcal{F}, \mathbb{P}^{X_1})$ *endlich ist.*

(b) Es gelte $E[X_1^4] < \infty$. Es werde nun eine Maximum-Likelihood-Schätzung durch eine Normalverteilung durchgeführt, das heißt, es sei $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = [-M, M] \times [\sigma_0^2, \sigma_1^2]$ mit festen $M, \sigma_1^2, \sigma_0^2 > 0$ und $l_\theta(x) = \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} + \log(\sigma^2)$. Zeigen Sie, dass

$$\Big[\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_\theta(X_i) - \mathbb{E} l_\theta(X_1)\Big)\Big]_{\theta \in \Theta} \xrightarrow{D} \mathbb{G} \quad \text{in} \quad (\ell^\infty(\Theta), \|\cdot\|_{\infty,\Theta}),$$

wobei $\mathbb{G}$ ein zentrierter Gauß-Prozess ist (hier muss die Kovarianzfunktion nicht angegeben werden).
Hinweis: Aufgabe 1.

Abgabe bis Donnerstag 19:00 Uhr, 01.06.2023, im Zettelkasten 01 im Mathematikon INF205, 1. Etage.
Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`