Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Abgabeblatt 4 - Lösungen

Aufgabe A1 (Schwache Konvergenz der empirischen Verteilungsfunktion in D, 8 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $Z_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. $U[0,1]$-verteilte Zufallsvariablen. Für $x \in [0,1]$ sei

$$\hat{F}_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Z_i \le x\}}$$

die empirische Verteilungsfunktion und $F_0(x) = x$. Definiere

$$G_n(x) := \sqrt{n}\big(\hat{F}_n(x) - F_0(x)\big), \qquad x \in [0,1].$$

Zeigen Sie mittels des Konvergenzkonzepts in $D[0,1]$ (Satz 1.44), dass

$$G_n \xrightarrow{D} W^\circ \quad \text{in} \quad (D[0,1], d_S).$$

wobei $W^\circ = (W_t^\circ)_{t\in[0,1]}$ eine stetige Version einer Brownschen Brücke ist.

Lösung: Wir zeigen die drei Bedingungen aus Satz 1.44.

(a) Die schwache Konvergenz wurde bereits auf einem früheren Blatt gezeigt: Für $x_1, ..., x_k \in [0,1]$ ist mit dem multivariaten zentralen Grenzwertsatz:

$$\big(G_n(x_j)\big)_{j=1,\ldots,k} = \Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Z_i \le x_j\}} - F_0(x_j)\Big)\Big)_{j=1,\ldots,k} \xrightarrow{D} N(0, \Sigma)$$

wobei $\Sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\{Z_1 \le x_i\}}, \mathbb{1}_{\{Z_1 \le x_j\}}) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Z_1 \le \min\{x_i, x_j\}\}}] - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Z_1 \le x_i\}}] \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Z_1 \le x_j\}}] = F_0(\min\{x_i, x_j\}) - F_0(x_i)F_0(x_j) = \min\{x_i, x_j\} - x_i x_j$. Damit gilt also

$$\big(G_n(x_j)\big)_{j=1,\ldots,k} \xrightarrow{D} (W_{x_j}^\circ)_{k=1,\ldots,k},$$

das heißt, die endlichdimensionalen Verteilungen von G_n konvergieren gegen die endlichdimensionalen Verteilungen von W°.

(b) Da W° eine stetige Version einer Brownschen Brücke ist, gilt $\lim_{\delta\to 0} W_{1-\delta}^\circ = W_1^\circ$, also insbesondere f.s. Konvergenz und damit schwache Konvergenz.

(c) Es ist

$$\big|G_n(s) - G_n(r)\big| = \frac{1}{\sqrt{n}}\Big|\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\big\{\mathbb{1}_{\{Z_i \le s\}} - F_0(s) - (\mathbb{1}_{\{Z_i \le r\}} - F_0(r))\big\}}_{=:M_{i,s,r}}\Big|$$

und daher

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\Big[\big|G_n(s)-G_n(r)\big|^2\cdot\big|G_n(t)-G_n(s)\big|^2\Big] \\ = & \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^n M_{i,s,r}\Big)^2\Big(\sum_{j=1}^n M_{j,t,s}\Big)^2\Big] \\ = & \frac{1}{n^2}\sum_{i_1,i_2,j_1,j_2=1}^n \mathbb{E}[M_{i_1,s,r}M_{i_2,s,r}M_{j_1,t,s}M_{j_2,t,s}]. \end{aligned}$$

Die Zufallsvariablen $M_{i,t,s}$ usw. sind für alle t,s in i i.i.d. und erfüllen $\mathbb{E}M_{i,t,s}=0$. Damit gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\Big[\big|G_n(s)-G_n(r)\big|^2\cdot\big|G_n(t)-G_n(s)\big|^2\Big] \\ \leq & \frac{1}{n^2}\Big(n\cdot\mathbb{E}[M_{1,s,r}^2M_{1,t,s}^2]+n^2\mathbb{E}[M_{1,s,r}^2]\mathbb{E}[M_{1,t,s}^2]+2n^2\cdot\mathbb{E}[M_{1,s,r}M_{1,t,s}]^2\Big). \qquad (*) \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{1,s,r}^2] &= \operatorname{Var}(\mathbb{1}_{\{Z_i\leq s\}})+\operatorname{Var}(\mathbb{1}_{\{Z_i\leq r\}})-2\operatorname{Cov}(\mathbb{1}_{\{Z_i\leq s\}},\mathbb{1}_{\{Z_i\leq r\}}) \\ &= (s-s^2)+(r-r^2)-2\cdot(\underbrace{\min\{r,s\}}_{=r}-sr) \\ &= s-r-(s^2+r^2-2rs)=(s-r)-(s-r)^2\leq s-r, \end{aligned}$$

und analog

$$\mathbb{E}[M_{1,t,s}^2]\leq t-s,$$

damit insgesamt

$$\mathbb{E}[M_{1,s,r}^2]\mathbb{E}[M_{1,t,s}^2]\leq(s-r)(t-s)\leq(t-r)^2.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{1,s,r}M_{1,t,s}] &= \mathbb{E}[(\mathbb{1}_{\{Z_i\leq s\}}-F_0(s))\cdot(\mathbb{1}_{\{Z_i\leq t\}}-F_0(t))] \\ &\quad -\mathbb{E}[(\mathbb{1}_{\{Z_i\leq s\}}-F_0(s))(\mathbb{1}_{\{Z_i\leq s\}}-F_0(s))] \\ &\quad -\mathbb{E}[(\mathbb{1}_{\{Z_i\leq r\}}-F_0(r))(\mathbb{1}_{\{Z_i\leq t\}}-F_0(t))] \\ &\quad +\mathbb{E}[(\mathbb{1}_{\{Z_i\leq r\}}-F_0(r))(\mathbb{1}_{\{Z_i\leq s\}}-F_0(s))] \\ &= \operatorname{Cov}(\mathbb{1}_{\{Z_i\leq s\}},\mathbb{1}_{\{Z_i\leq t\}})-\operatorname{Var}(\mathbb{1}_{\{Z_i\leq s\}}) \\ &\quad -\operatorname{Cov}(\mathbb{1}_{\{Z_i\leq r\}},\mathbb{1}_{\{Z_i\leq t\}})+\operatorname{Cov}(\mathbb{1}_{\{Z_i\leq r\}},\mathbb{1}_{\{Z_i\leq s\}}) \\ &= (s-st)-(s-s^2)-(r-rt)+(r-sr) \\ &= -st+s^2+rt-sr=s\cdot(s-t)+r\cdot(t-s)=(t-s)\cdot(r-s). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\mathbb{E}[M_{1,s,r}M_{1,t,s}]^2\leq(t-s)^2(s-r)^2\leq(t-r)^4.$$

Zuletzt gilt $M_{1,s,r}^2\leq 2(\mathbb{1}_{\{Z_1\leq s\}}-\mathbb{1}_{\{Z_1\leq r\}})^2+2(s-r)^2$, $M_{1,t,s}^2\leq 2(\mathbb{1}_{\{Z_1\leq t\}}-\mathbb{1}_{\{Z_1\leq s\}})^2+2(t-s)^2$ und damit ist

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[M_{1,s,r}^2M_{1,t,s}^2] \\ \leq & 4\mathbb{E}[(\mathbb{1}_{\{Z_1\leq s\}}-\mathbb{1}_{\{Z_1\leq r\}})^2(\mathbb{1}_{\{Z_1\leq t\}}-\mathbb{1}_{\{Z_1\leq s\}})^2]+4(s-r)^2+4(t-s)^2+4(s-r)^2(t-s)^2 \\ \leq & 4\mathbb{E}[(\mathbb{1}_{\{Z_1\leq s\}}-\mathbb{1}_{\{Z_1\leq r\}})(\mathbb{1}_{\{Z_1\leq t\}}-\mathbb{1}_{\{Z_1\leq s\}})]+4(s-r)^2+4(t-s)^2+4(s-r)^2(t-s)^2 \\ \leq & \underbrace{4\big(s-s-r+r\big)}_{=0}+4(s-r)^2+4(t-s)^2+4(s-r)^2 \\ \leq & 12(t-r)^2. \end{aligned}$$

Eingesetzt in (*) folgt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\Big[\big|G_n(s)-G_n(r)\big|^2 \cdot \big|G_n(t)-G_n(s)\big|^2\Big] \\ \leq\ & \frac{1}{n^2}\Big(n\cdot 12(t-r)^2 + n^2(t-r)^2 + 2n^2(t-r)^2\Big) \\ \leq\ & 15(t-r)^2 \leq (F(t)-F(r))^\beta, \end{aligned}$$

wobei $F(t)=4t$ streng monoton wachsend, und $\beta = 2$.

Damit sind alle Bedingungen aus Satz 1.44 erfüllt und es folgt

$$G_n \overset{D}{\to} W^\circ \quad \text{in} \quad (D[0,1], d_S).$$

Aufgabe A2 (Eigenschaften des Raums (D, d_S), 4 = 2 + 2 Punkte).

In dieser Aufgabe wird der Raum $(D[0,1], d_S)$ betrachtet. Zeigen Sie die folgende Eigenschaft: Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $f \in C[0,1]$ (stetig!), so gilt

$$d_S(f_n, f) \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

Mit anderen Worten: Ist die Grenzfunktion stetig, ist Konvergenz bzgl. d_S gleichbedeutend mit Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Lösung: Zu zeigen sind zwei Richtungen.

- '$\Leftarrow$': Zunächst gilt stets (auch wenn $f \in D[0,1]$):

$$d_S(f_n, f) = \inf_{\lambda\in\Lambda} \max\big\{\|\lambda - id\|_\infty, \|f_n - f\circ\lambda\|_\infty\big\} \overset{\lambda = id}{\leq} \|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

- '$\Rightarrow$': Sei $f \in C[0,1]$. Dann ist f gleichmäßig stetig auf $[0,1]$. Es gilt für alle $\lambda \in \Lambda$:

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \|f_n - f\circ\lambda\|_\infty + \|f\circ\lambda - f\|_\infty. \quad (*)$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es $\delta \in (0,\varepsilon)$ mit

$$\forall x, y \in [0,1]: \quad |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon.$$

bzw.

$$\forall x \in [0,1]: \quad |x-\lambda(x)| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-(f\circ\lambda)(x)| \leq \varepsilon. \quad (**)$$

Sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\forall n \geq N : d_S(f_n, f) < \frac{\delta}{2}$. Für $n \geq N$ sei $\lambda_n \in \Lambda$ so, dass

$$\max\big\{\|\lambda_n - id\|_\infty, \|f_n - f\circ\lambda_n\|_\infty\big\} \leq d_S(f_n, f) + \frac{\delta}{4} \leq \frac{3\delta}{4} < \delta$$

(Def. Infimum).

Es folgt $\|\lambda_n - id\|_\infty < \delta$. Dann folgt aus (**): $\|f - f\circ\lambda_n\|_\infty \leq \varepsilon$ und damit aus (*):

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \underbrace{\|f_n - f\circ\lambda_n\|_\infty}_{\leq d_S(f_n,f)+\frac{\delta}{4}\leq\delta\leq\varepsilon} + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Damit gilt also $\forall n \geq N : \|f_n - f\|_\infty \leq 2\varepsilon$, also wurde nachgerechnet: $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$.

Aufgabe A3 (Schwache Konvergenz von Kolmogorov-Smirnov und Cramer-von Mises, 4 = 2 + 2 Punkte).

Sei $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $U[0,1]$-verteilten reellen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Verteilungsfunktion $F_0(t) := t$ für $t \in [0,1]$. Sei $\hat{F}_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{Y_i \le x\}}$ die empirische Verteilungsfunktion. Sei

$$G_n(x) := \sqrt{n}(\hat{F}_n(x) - F_0(x)).$$

Zeigen Sie unter direkter Nutzung der schwachen Konvergenz aus Aufgabe 1 und der Eigenschaft von d_S aus Aufgabe 2:

(a) $T_n := \sqrt{n}\sup_{x\in[0,1]} |\hat{F}_n(x) - F_0(x)| \xrightarrow{D} \sup_{x\in[0,1]} |W^\circ(x)|$ (*Kolmogorov-Smirnov*),

(b) $T_n := n \cdot \int_0^1 \left\{\hat{F}_n(x) - F_0(x)\right\}^2 \,\mathrm{d}x \xrightarrow{D} \int_0^1 W^\circ(x)^2 \,\mathrm{d}x$ (*Cramer-von-Mises*).

Lösung:

(a) Die Abbildung

$$\Phi : D[0,1] \to \mathbb{R}, \quad \Phi(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

ist stetig in jedem $f \in C[0,1]$, denn: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $d_S(f_n, f) \to 0$. Dann folgt mit Aufgabe A2: $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, also auch

$$|\Phi(f_n) - \Phi(f)| \le \big|\|f_n\|_\infty - \|f\|_\infty\big| \le \|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

Damit ist Φ stetig in f. Da laut Aufgabe 1: $G_n \xrightarrow{D} W^\circ$ und $W^\circ : \Omega \to C[0,1]$, folgt mit dem CMT

$$\sqrt{n} \cdot \sup_{x\in[0,1]} \left|\hat{F}_n(x) - F_0(x)\right| = \Phi(G_n) \xrightarrow{D} \Phi(W^\circ) = \sup_{x\in[0,1]} |W^\circ(x)|.$$

(b) Die Abbildung

$$\Phi : D[0,1] \to \mathbb{R}, \quad \Phi(f) = \int_0^1 f(x)^2 dx$$

ist stetig in jedem $f \in C[0,1]$, denn: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $d_S(f_n, f) \to 0$. Dann folgt mit Aufgabe A2: $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Aus einer früheren Übungsaufgabe (Blatt 2, A2(a)) folgt

$$\Phi(f_n) \to \Phi(f),$$

das heißt, Φ ist stetig in f. Da laut Aufgabe 1: $G_n \xrightarrow{D} W^\circ$ und $W^\circ : \Omega \to C[0,1]$, folgt mit dem CMT

$$n \cdot \int_0^1 \left\{\hat{F}_n(x) - F_0(x)\right\}^2 dx = \Phi(G_n) \xrightarrow{D} \Phi(W^\circ) = \int_0^1 W^\circ(x)^2 dx.$$

Abgabe bis Donnerstag 11:00 Uhr, 25.05.2023, im Zettelkasten 01 im Mathematikon INF205, 1. Etage.
Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`