Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Abgabeblatt 4

Aufgabe A1 (Schwache Konvergenz der empirischen Verteilungsfunktion in D, 8 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $Z_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. $U[0,1]$-verteilte Zufallsvariablen. Für $x \in [0,1]$ sei

$$\hat{F}_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Z_i \leq x\}}$$

die empirische Verteilungsfunktion und $F_0(x) = x$. Definiere

$$G_n(x) := \sqrt{n}\big(\hat{F}_n(x) - F_0(x)\big), \qquad x \in [0,1].$$

Zeigen Sie mittels des Konvergenzkonzepts in $D[0,1]$ (Satz 1.44), dass

$$G_n \xrightarrow{D} W^\circ \quad \text{in} \quad (D[0,1], d_S).$$

wobei $W^\circ = (W_t^\circ)_{t \in [0,1]}$ eine stetige Version einer Brownschen Brücke ist.

Aufgabe A2 (Eigenschaften des Raums (D, d_S), 4 = 2 + 2 Punkte).
In dieser Aufgabe wird der Raum $(D[0,1], d_S)$ betrachtet. Zeigen Sie die folgende Eigenschaft: Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $f \in C[0,1]$ (stetig!), so gilt

$$d_S(f_n, f) \to 0 \quad \iff \quad \|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

Mit anderen Worten: Ist die Grenzfunktion stetig, ist Konvergenz bzgl. d_S gleichbedeutend mit Konvergenz bzgl. $\| \cdot \|_\infty$.

Aufgabe A3 (Schwache Konvergenz von Kolmogorov-Smirnov und Cramer-von Mises, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von $U[0,1]$-verteilten reellen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Verteilungsfunktion $F_0(t) := t$ für $t \in [0,1]$. Sei $\hat{F}_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Y_i \leq x\}}$ die empirische Verteilungsfunktion. Sei

$$G_n(x) := \sqrt{n}(\hat{F}_n(x) - F_0(x)).$$

Zeigen Sie unter direkter Nutzung der schwachen Konvergenz aus Aufgabe 1 und der Eigenschaft von d_S aus Aufgabe 2:

(a) $T_n := \sqrt{n} \sup_{x \in [0,1]} |\hat{F}_n(x) - F_0(x)| \xrightarrow{D} \sup_{x \in [0,1]} |W^\circ(x)|$ (*Kolmogorov-Smirnov*),

(b) $T_n := n \cdot \int_0^1 \left\{\hat{F}_n(x) - F_0(x)\right\}^2 \,\mathrm{d}x \xrightarrow{D} \int_0^1 W^\circ(x)^2 \,\mathrm{d}x$ (*Cramer-von-Mises*).

Abgabe bis Donnerstag 11:00 Uhr, 25.05.2023, im Zettelkasten 01 im Mathematikon INF205, 1. Etage.
Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`