Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Abgabeblatt 3 - Lösungen

Aufgabe A1 (Nachweis einer schwachen Konvergenz, 4 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $Z_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[Z_1^2 e^{2|Z_1|}] < \infty$. Für $t \in [0,1]$ definiere $M(t) := \mathbb{E}e^{tZ_1}$ und

$$X_n(t) := \sqrt{n} \cdot \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{tZ_i} - M(t)\Big).$$

Zeigen Sie mittels des entwickelten Konvergenzkonzepts, dass

$$X_n \xrightarrow{D} G \quad \text{ in } (C[0,1], \|\cdot\|_\infty),$$

wobei G ein zentrierter stetiger Gaußscher Prozess mit Kovarianzfunktion $\gamma(s,t) = M(t+s) - M(t)M(s)$ ist.
Hinweis: $e^{tZ_1} - e^{sZ_1} = Z_1 e^{\xi \cdot Z_1}(t-s)$ *mit einem* ξ *zwischen* s, t *nach dem Satz von Taylor.*

Lösung: Zu zeigen sind die beiden Teile des Konvergenzkonzepts für $C[0,1]$, das heißt, Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen (fidis) und Nachrechnen der Bedingungen von Satz 1.35 (Kolmogorov-Kriterium für stochastisch gleichgradige Stetigkeit).

(i) *fidi-Konvergenz:* Seien $k \in \mathbb{N}$, $t_1, ..., t_k \in T$. Da die Z_i i.i.d. sind, sind auch die Zufallsvektoren

$$\Big(e^{t_1 Z_i}, ..., e^{t_k Z_i}\Big), \quad i \in \mathbb{N}$$

i.i.d.
Außerdem gilt

$$\mathbb{E}[(e^{tZ_1})^2] = \mathbb{E}[e^{2tZ_1}] \le \mathbb{E}e^{2|Z_1|} \le \mathbb{E}[\max\{1, Z_1^2\}e^{2|Z_1|}] \le \mathbb{E}[Z_1^2 e^{2|Z_1|}] + e^2 < \infty.$$

Mit dem multivariaten zentralen Grenzwertsatz folgt

$$\begin{pmatrix} X_n(t_1) \\ \vdots \\ X_n(t_k) \end{pmatrix} = \sqrt{n} \cdot \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} e^{t_1 Z_i} \\ \vdots \\ e^{t_k Z_i} \end{pmatrix} - \mathbb{E}\begin{pmatrix} e^{t_1 Z_1} \\ \vdots \\ e^{t_k Z_1} \end{pmatrix}\Big) \xrightarrow{D} N(0, \Sigma)$$

mit $\Sigma_{jl} = \mathrm{Cov}(e^{t_j Z_1}, e^{t_l Z_k}) = \mathbb{E}[e^{(t_j + t_l)Z_1}] - \mathbb{E}e^{t_j Z_1}\mathbb{E}e^{t_l Z_1} = M(t_j + t_l) - M(t_j)M(t_l)$.
Sei nun also $X = (X(t))_{t \in T}$ ein stetiger zentrierter Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion $\gamma(s,t) = M(t+s) - M(t)M(s)$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} X_n(t_1) \\ \vdots \\ X_n(t_k) \end{pmatrix} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix} X(t_1) \\ \vdots \\ X(t_k) \end{pmatrix},$$

das heißt, die endlichdimensionalen Verteilungen von X_n konvergieren gegen diejenigen von X.

(ii) *Kolmogorov-Stetigkeitskriterium:* Seien $s, t \in [0,1]$. Es gilt mit dem Satz von Taylor (entwickle $f(t) = e^{tZ_1}$ um s, d.h. $f(t) = f(s) + f'(\xi) \cdot (t-s)$ mit ξ zwischen s, t und $f'(\xi) = Z_1 e^{\xi Z_1}$:

$$|e^{tZ_1} - e^{sZ_1}| = |Z_1| e^{\xi Z_1} |t-s| \leq |Z_1| e^{|Z_1|} |t-s|.$$

Es gilt mit $R_i := |Z_i|(1 + e^{Z_i})$ also

$$|e^{tZ_i} - e^{sZ_i}| \leq R_i \cdot |t-s|.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_n(t) - X_n(s)|^2] &= \frac{1}{n}\mathbb{E}\Big|\sum_{i=1}^n \big((e^{tZ_i} - e^{sZ_i}) - \mathbb{E}(e^{tZ_1} - e^{sZ_1})\big)\Big|^2 \\
&= \frac{1}{n}\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^n \big(e^{tZ_i} - e^{sZ_i}\big)\Big) \\
&\overset{Z_i \text{ i.i.d.}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(e^{tZ_1} - e^{sZ_1}) \\
&= \mathrm{Var}(e^{tZ_1} - e^{sZ_1}) \\
&\leq \mathbb{E}[(e^{tZ_1} - e^{sZ_1})^2] \\
&\leq \mathbb{E}[R_1^2] \cdot |t-s|^2.
\end{aligned}$$

Da

$$\mathbb{E}[R_1^2] \leq \mathbb{E}[|Z_1|^2 e^{2|Z_1|}] < \infty,$$

ist die Voraussetzung des Kolmogorov-Kriteriums (1.35) nachgerechnet und es folgt, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stochastisch gleichgradig stetig ist.

Aus (i) und (ii) folgt $X_n \xrightarrow{D} X$ mit X ein stetiger zentrierter Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion $\gamma(s,t) = M(t+s) - M(t)M(s)$.

Aufgabe A2 (Die Konvergenz einer Approximation des empirischen Prozesses, 8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $Z_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Für $\varepsilon_n > 0$ definiere

$$H_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad H_n(u) = \mathbb{1}_{\{u \geq \varepsilon_n\}} + \Big(\frac{u + \varepsilon_n}{2\varepsilon_n}\Big) \cdot \mathbb{1}_{\{-\varepsilon_n \leq u < \varepsilon_n\}} = \begin{cases} 0, & u \leq -\varepsilon_n, \\ \frac{u+\varepsilon_n}{2\varepsilon_n}, & -\varepsilon_n \leq u \leq \varepsilon_n, \\ 1, & u \geq \varepsilon_n. \end{cases}$$

als eine lineare Interpolation von $\mathbb{1}_{\{u \geq \varepsilon_n\}}$. Definiere nun

$$\bar{\nu}_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \big(H_n(t - Z_i) - \mathbb{E}H_n(t - Z_1)\big)$$

als Approximation des empirischen Prozesses $\nu_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \big(\mathbb{1}_{\{Z_i \leq t\}} - t\big)$. Zeigen Sie

$$\bar{\nu}_n \xrightarrow{D} W^\circ \quad \text{in } (C[0,1], \|\cdot\|_\infty),$$

wobei W° eine Brownsche Brücke ist, indem Sie die folgenden Schritte durchführen:

(a) Zeigen Sie, dass für alle $t \in [0,1]$ gilt: $|\mathbb{E}H_n(t-Z_1)-t| \le \varepsilon_n$.

(b) Zeigen Sie, dass für festes $t \in [0,1]$ gilt: $|\bar{\nu}_n(t)-\nu_n(t)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
Hinweis: Nutzen Sie die Tschebyscheff-Ungleichung.

(c) Zeigen Sie, dass die endlichdimensionalen Verteilungen von $\bar{\nu}_n$ gegen diejenigen von W° konvergieren.
Hinweis: Gemäß (b) und Slutzky genügt es, dies für die endlichdimensionalen Verteilungen von ν_n zu zeigen.

Von nun an sei $\varepsilon_n = n^{-3/4}$.

(d) Zeigen Sie, dass H_n Lipschitz-stetig mit Konstante $\frac{1}{2\varepsilon_n}$ ist. Folgern Sie, dass

$$|\bar{\nu}_n(t)-\bar{\nu}_n(s)| \le \frac{\sqrt{n}}{\varepsilon_n}|t-s|.$$

(e) Zeigen Sie, dass im Fall $|t-s| \le \frac{1}{n^2}$ gilt: $|\bar{\nu}_n(t)-\bar{\nu}_n(s)|^4 \le |t-s|^{3/2}$.

(f) Definieren Sie

$$C_i := \big(H_n(t-Z_i)-\mathbb{E}H_n(t-Z_1)\big)-\big(H_n(s-Z_i)-\mathbb{E}H_n(s-Z_1)\big)$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[|\bar{\nu}_n(t)-\bar{\nu}_n(s)|^4] \le c\cdot\big\{\frac{1}{n}\mathbb{E}[C_1^4]+\mathbb{E}[C_1^2]^2\big\}$ mit einer geeigneten Konstante $c>0$.

(g) Zeigen Sie, dass für $k \in \{2,4\}$ gilt: $\mathbb{E}[C_1^k] \le c_k \cdot |t-s|$ mit einer geeigneten Konstante $c_k > 0$.

(h) Folgern Sie aus (f) und (g), dass auch im Fall $|t-s| > \frac{1}{n^2}$ die Bedingung des Satzes 1.35 erfüllt ist.

Lösung:

(a) Es gilt für $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}H_n(t-Z_i) &= \int_0^1 \mathbb{1}_{\{t-y\ge\varepsilon_n\}}dy + \int_0^1 \mathbb{1}_{\{-\varepsilon_n\le t-y\le\varepsilon_n\}}\frac{t-y+\varepsilon_n}{2\varepsilon_n}dy \\
&= \int \mathbb{1}_{\{t-\varepsilon_n\ge y\ge 0\}}dy + \int \frac{t-y+\varepsilon_n}{2\varepsilon_n}\mathbb{1}_{\{\max\{0,t-\varepsilon_n\}\le y\le\min\{1,t+\varepsilon_n\}\}}dy.
\end{aligned}$$

Falls $t \in [\varepsilon_n, 1-\varepsilon_n]$, folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}H_n(t-Z_i) &= t-\varepsilon_n + \frac{1}{2\varepsilon_n}\int_{t-\varepsilon_n}^{t+\varepsilon_n}(t+\varepsilon_n-y)dy \\
&= t-\varepsilon_n + \frac{1}{4\varepsilon_n}\big[-(t+\varepsilon_n-y)^2\big]_{t-\varepsilon_n}^{t+\varepsilon_n} = t-\varepsilon_n+\frac{4\varepsilon_n^2}{4\varepsilon_n} = t.
\end{aligned}$$

Falls $t < \varepsilon_n$, folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}H_n(t-Z_i) &= \frac{1}{2\varepsilon_n}\int_0^{t+\varepsilon_n}(t+\varepsilon_n-y)dy = \frac{1}{4\varepsilon_n}\big[-(t+\varepsilon_n-y)^2\big]_0^{t+\varepsilon_n} \\
&= \frac{(t+\varepsilon_n)^2}{4\varepsilon_n} \\
&= \frac{(t+\varepsilon_n)^2}{4\varepsilon_n} - t + t = \frac{(t-\varepsilon_n)^2}{4\varepsilon_n} + t,
\end{aligned}$$

also

$$|\mathbb{E}H_n(t-Z_i)-t| \leq \frac{(t-\varepsilon_n)^2}{4\varepsilon_n} \leq \frac{4\varepsilon_n^2}{4\varepsilon_n} = \varepsilon_n.$$

und falls $t > 1-\varepsilon_n$, folgt ähnlich:

$$\mathbb{E}H_n(t-Z_i) = t - \frac{(t-(1-\varepsilon_n))^2}{4\varepsilon_n}.$$

Damit ist

$$|\mathbb{E}H_n(t-Z_i)-t| \leq \varepsilon_n$$

(b) Es gilt $\mathbb{E}\bar{\nu}_n(t) = 0$ und $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Z_1\leq t\}}] = \mathbb{P}(Z_1 \leq t) = t$, also auch $\mathbb{E}\nu_n(t) = 0$. Daher ist

$$\mathbb{E}[\bar{\nu}_n(t) - \nu_n(t)] = 0.$$

Wir zeigen nun $\mathrm{Var}(\bar{\nu}_n(t) - \nu_n(t)) \to 0$. Dann folgt mit der Tschebyscheff-Ungleichung $|\bar{\nu}_n(t) - \nu_n(t)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Da Z_i, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d., gilt (Varianz ist additiv etc.)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\bar{\nu}_n(t) - \nu_n(t)) &= \mathrm{Var}(H_n(t-Z_1) - \mathbb{1}_{\{Z_1\leq t\}}) \\
&\leq \mathbb{E}[(H_n(t-Z_1) - \mathbb{1}_{\{Z_1\leq t\}})^2] \\
&\leq \int_0^1 \Big(\underbrace{\mathbb{1}_{\{y\leq t-\varepsilon_n\}} - \mathbb{1}_{\{y\leq t\}}}_{=\mathbb{1}_{\{t<y\leq t-\varepsilon_n\}}} + \mathbb{1}_{\{t-\varepsilon_n\leq y\leq t+\varepsilon_n\}} \Big(\frac{t-y+\varepsilon_n}{2\varepsilon_n}\Big)\Big)^2 dy \\
&\leq 2\int_0^1 \mathbb{1}_{\{t<y\leq t-\varepsilon_n\}} + \mathbb{1}_{\{t-\varepsilon_n\leq y\leq t+\varepsilon_n\}} \Big(\frac{t-y+\varepsilon_n}{2\varepsilon_n}\Big)^2 dy \\
&\leq 2\Big(\varepsilon_n + \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} \Big(\frac{u+\varepsilon_n}{2\varepsilon_n}\Big)^2 du\Big) \\
&= 2(\varepsilon_n + \frac{2}{3}\varepsilon_n) \leq 4\varepsilon_n \to 0.
\end{aligned}$$

(c) Seien $k \in \mathbb{N}$ und $t_1, ..., t_k \in [0,1]$. Dann ist $(\mathbb{1}_{\{Z_i\leq t_j\}} - t_j)_{j=1,\ldots,k}$ eine i.i.d. Folge von Zufallsvektoren mit $|\mathbb{1}_{\{Z_i\leq t_j\}} - t_j| \leq 1$ (und daher endlicher Varianz und Erwartungswert). Mit dem multivariaten zentralen Grenzwertsatz folgt

$$\begin{pmatrix} \nu_n(t_1) \\ \vdots \\ \nu_n(t_k) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\{Z_i\leq t_1\}} - t_1 \\ \vdots \\ \mathbb{1}_{\{Z_i\leq t_k\}} - t_k \end{pmatrix} \xrightarrow{D} N(0,\Sigma)$$

mit

$$\Sigma_{jl} = \mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\{Z_1\leq t_j\}}, \mathbb{1}_{\{Z_1\leq t_l\}}) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Z_1\leq \min\{t_j,t_l\}\}}] - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Z_1\leq t_j\}}]\cdot\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Z_1\leq t_l\}}] = \min\{t_j,t_l\} - t_j t_l.$$

Dies ist genau die Kovarianzfunktion $\gamma(t_j, t_l)$ einer Brownschen Brücke. Daher gilt

$$\begin{pmatrix} \nu_n(t_1) \\ \vdots \\ \nu_n(t_k) \end{pmatrix} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix} W^\circ(t_1) \\ \vdots \\ W^\circ(t_k) \end{pmatrix}.$$

Aufgrund von (b) gilt außerdem

$$\left\| \begin{pmatrix} \nu_n(t_1) \\ \vdots \\ \nu_n(t_k) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{\nu}_n(t_1) \\ \vdots \\ \bar{\nu}_n(t_k) \end{pmatrix} \right\| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Damit folgt mit dem Satz von Slutzky

$$\begin{pmatrix} \bar{\nu}_n(t_1) \\ \vdots \\ \bar{\nu}_n(t_k) \end{pmatrix} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix} W^\circ(t_1) \\ \vdots \\ W^\circ(t_k) \end{pmatrix}$$

Also konvergieren die endlichdimensionalen Verteilungen von $\bar{\nu}_n$ gegen diejenigen von W°.

(d) Die Ableitungen von H_n ist an allen Stellen, wo sie existiert, kleiner als $\frac{1}{2\varepsilon_n}$. In den Stellen $-\varepsilon_n, \varepsilon_n$ findet ein stetiger Übergang statt. Damit ist H_n insgesamt Lipschitz-stetig mit Konstante $\frac{1}{2\varepsilon_n}$.

Es folgt

$$\begin{aligned} |\bar{\nu}_n(t) - \bar{\nu}_n(s)| &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \Big\{ |H_n(t - Z_i) - H_n(s - Z_i)| + \mathbb{E}|H_n(t - Z_1) - H_n(s - Z_1)| \Big\} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 2 \cdot \frac{1}{2\varepsilon_n} |t - s| = \frac{\sqrt{n}}{\varepsilon_n} |t - s|. \end{aligned}$$

(e) Sei nun $|t - s| < \frac{1}{n^2}$. Dann gilt mit (d):

$$|\bar{\nu}_n(t) - \bar{\nu}_n(s)|^4 \leq \frac{n^2}{\varepsilon_n^4} |t - s|^4 \leq \frac{1}{n^3 \varepsilon_n^4} |t - s|^{3/2} \overset{\varepsilon_n = n^{-3/4}}{=} |t - s|^{3/2}.$$

(f) Definiere C_i wie angegeben. Dann ist

$$\bar{\nu}_n(t) - \bar{\nu}_n(s) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n C_i.$$

Es folgt wie im Beweis von Satz 1.34 (Donsker), da C_i i.i.d. mit $\mathbb{E}C_1 = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\bar{\nu}_n(t) - \bar{\nu}_n(s)|^4] &\leq \frac{1}{n^2} \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^n C_i \Big)^4 \Big] \\ &\leq \frac{1}{n^2} \Big(n\mathbb{E}[C_1^4] + 3n^2 \mathbb{E}[C_1^2]^2 \Big) \\ &\leq 3 \Big(\frac{\mathbb{E}[C_1^4]}{n} + \mathbb{E}[C_1^2]^2 \Big). \end{aligned}$$

(g) Es gilt für $1 \geq t > s \geq 0$:

$$\begin{aligned} &H_n(t - Z_1) - H_n(s - Z_1) \\ = \; &\mathbb{1}_{\{t - \varepsilon_n \geq Z_1 > s - \varepsilon_n\}} \\ &+ \Big[\Big(\frac{t - Z_1 + \varepsilon_n}{2\varepsilon_n} \Big) \mathbb{1}_{\{t - \varepsilon_n < Z_1 < t + \varepsilon_n\}} - \Big(\frac{s - Z_1 + \varepsilon_n}{2\varepsilon_n} \Big) \mathbb{1}_{\{s - \varepsilon_n < Z_1 < s + \varepsilon_n\}} \Big] =: A + B \end{aligned}$$

Es folgt mit $(x+y)^k \le 2^k(x^k+y^k)$:

$$|H_n(t-Z_1)-H_n(s-Z_1)|^k \le 2^k\cdot(A^k+B^k) \overset{\mathbb{1}^k=\mathbb{1}}{=} 2^k(A+B^k).$$

Damit

$$\mathbb{E}\big[|H_n(t-Z_1)-H_n(s-Z_1)|^k\big] \le 2^k\big(\mathbb{E}A+\mathbb{E}[B^k]\big) \le 2^k\big(|t-s|+\mathbb{E}[B^k]\big). \qquad (*)$$

Für B^k machen wir eine weitere Fallunterscheidung. Falls $|t-s|>2\varepsilon_n$, haben die beiden Indikatorfunktionen in B leeren Schnitt. Damit ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B^k] &= \mathbb{E}\Big[\underbrace{\Big(\frac{t-Z_1+\varepsilon_n}{2\varepsilon_n}\Big)^k}_{\le 1}\mathbb{1}_{\{t-\varepsilon_n<Z_1<t+\varepsilon_n\}}\Big]+\mathbb{E}\Big[\underbrace{\Big(\frac{s-Z_1+\varepsilon_n}{2\varepsilon_n}\Big)^k}_{\le 1}\mathbb{1}_{\{s-\varepsilon_n<Z_1<s+\varepsilon_n\}}\Big]\\ &\le 2\varepsilon_n+2\varepsilon_n\le 2|t-s|.\end{aligned}$$

Falls $|t-s|<2\varepsilon_n$, haben die Indikatoren in B nichtleeren Schnitt. In diesem Fall ist

$$B=\Big(\frac{t-Z_1+\varepsilon_n}{2\varepsilon_n}\Big)\mathbb{1}_{\{s-\varepsilon_n<Z_1<t+\varepsilon_n\}}+\Big(\frac{s-t}{2\varepsilon_n}\Big)\mathbb{1}_{\{t-\varepsilon_n<Z_1<s+\varepsilon_n\}}+\Big(\frac{t-Z_1+\varepsilon_n}{2\varepsilon_n}\Big)\mathbb{1}_{\{s+\varepsilon_n\le Z_1\le t+\varepsilon_n\}}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B^k] &= \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{t-Z_1+\varepsilon_n}{2\varepsilon_n}\Big)^k\mathbb{1}_{\{s-\varepsilon_n<Z_1<t+\varepsilon_n\}}\Big]+\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{s-t}{2\varepsilon_n}\Big)^k\mathbb{1}_{\{t-\varepsilon_n<Z_1<s+\varepsilon_n\}}\Big]\\ &\quad+\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{t-Z_1+\varepsilon_n}{2\varepsilon_n}\Big)^k\mathbb{1}_{\{s+\varepsilon_n\le Z_1\le t+\varepsilon_n\}}\Big]\end{aligned}$$

Für alle drei Terme kann erneut $\le c'|t-s|$ gezeigt werden, unter Nutzung der Ungleichung $|t-s|<2\varepsilon_n$ um das ε_n im Nenner zu eliminieren. Damit folgt die Aussage aus (*).

(h) Es gelte $|t-s|>\frac{1}{n^2}$. In (f) wurde gezeigt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|\bar\nu_n(t)-\bar\nu_n(s)|^4] &\le 3\Big(\frac{\mathbb{E}[C_1^4]}{n}+\mathbb{E}[C_1^2]^2\Big)\overset{(g)}{\le} 3\Big(\frac{c_4}{n}|t-s|+c_2^2|t-s|^2\Big)\\ &\overset{\frac{1}{n}<|t-s|^{1/2}}{\le} 3\Big(c_4|t-s|^{3/2}+c_2^2|t-s|^2\Big)\overset{|t-s|\le 1}{\le} 3(c_4+c_2^2)|t-s|^{3/2}.\end{aligned}$$

Damit ist das Kolmogorov'sche Stetigkeitskriterium nachgerechnet und es folgt insgesamt

$$\bar\nu_n \xrightarrow{D} W^\circ.$$

Aufgabe A3 (Eine Folgerung aus dem Satz von Donsker, 4 Punkte).

Sei $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $Z_i:\Omega\to\mathbb{R}$, $i\in\mathbb{N}$ i.i.d. mit $\mathbb{E}Z_1=0$, $\mathrm{Var}(Z_1)=\sigma^2$ und $\mathbb{E}[Z_1^4]<\infty$. Definiere

$$S_k:=\sum_{i=1}^k Z_i, \qquad k\in\{0,...,n\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\max_{k\in\{0,\dots,n\}} S_k \xrightarrow{D} \max_{t\in[0,1]} W(t),$$

wobei $W=(W(t))_{t\in[0,1]}$ eine stetige Brownsche Bewegung ist.

Hinweis: Wenden Sie ein geeignetes Funktional auf den Satz von Donsker an. Eliminieren Sie dann den Interpolationsterm mittels Lipschitz-Stetigkeit des Funktionals und dem Satz von Slutzky (vgl. Beispiel 1.37).

Lösung: Aus dem Satz von Donsker (die Voraussetzungen sind laut Aufgabenstellung erfüllt) ist bekannt, dass

$$\tilde{W}_n \xrightarrow{D} W,$$

wobei W eine Brownsche Bewegung ist und

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_n(t) &= W_n(t) + R_n(t), \\
W_n(t) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} Z_i, \\
R_n(t) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot \big(nt - \lfloor nt \rfloor\big) Z_{\lfloor nt \rfloor + 1}.
\end{aligned}$$

Das Funktional

$$\Phi : C[0,1] \to \mathbb{R}, \quad \Phi(f) = \sup_{t \in [0,1]} f(t)$$

ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ nach Blatt 2, Aufgabe A2. Tatsächlich gilt diese Eigenschaft sogar für beliebigen Definitionsbereich, solange als Abstandsmaß die $\|\cdot\|_\infty$-Norm verwendet wird. Mit dem CMT folgt

$$\Phi(\tilde{W}_n) \xrightarrow{D} \Phi(W) = \max_{t \in [0,1]} W(t).$$

Es gilt weiter aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit von Φ:

$$\big|\Phi(\tilde{W}_n) - \Phi(W_n)\big| \leq \|\underbrace{\tilde{W}_n - W_n}_{=R_n}\| \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sup_{t \in [0,1]} \big(\underbrace{|nt - \lfloor nt \rfloor|}_{\leq 1} \cdot |Z_{\lfloor nt \rfloor + 1}|\big) \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{k=1,\ldots,n} |Z_k| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Die letzte stochastische Konvergenz wurde bereits in der Vorlesung (Beispiel 1.37 zur Changepoint-Analyse) gezeigt. Damit folgt mit dem Satz von Slutzky

$$\Phi(W_n) \xrightarrow{D} \max_{t \in [0,1]} W(t).$$

Nun ist

$$\Phi(W_n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{t \in [0,1]} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} Z_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{k=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{k} Z_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{k=0,\ldots,n} S_k,$$

das heißt, die Behauptung.

Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`