Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Abgabeblatt 3

Aufgabe A1 (Nachweis einer schwachen Konvergenz, 4 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $Z_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[Z_1^2 e^{2|Z_1|}] < \infty$. Für $t \in [0,1]$ definiere $M(t) := \mathbb{E}e^{tZ_1}$ und

$$X_n(t) := \sqrt{n} \cdot \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{tZ_i} - M(t)\Big).$$

Zeigen Sie mittels des entwickelten Konvergenzkonzepts, dass

$$X_n \xrightarrow{D} G \quad \text{in } (C[0,1], \|\cdot\|_\infty),$$

wobei G ein zentrierter stetiger Gaußscher Prozess mit Kovarianzfunktion $\gamma(s,t) = M(t+s) - M(t)M(s)$ ist.
Hinweis: $e^{tZ_1} - e^{sZ_1} = Z_1 e^{\xi \cdot Z_1}(t-s)$ *mit einem* ξ *zwischen* s, t *nach dem Satz von Taylor.*

Aufgabe A2 (Die Konvergenz einer Approximation des empirischen Prozesses, 8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $Z_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Für $\varepsilon_n > 0$ definiere

$$H_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad H_n(u) = \mathbb{1}_{\{u \geq \varepsilon_n\}} + \Big(\frac{u + \varepsilon_n}{2\varepsilon_n}\Big) \cdot \mathbb{1}_{\{-\varepsilon_n \leq u < \varepsilon_n\}} = \begin{cases} 0, & u \leq -\varepsilon_n, \\ \frac{u+\varepsilon_n}{2\varepsilon_n}, & -\varepsilon_n \leq u \leq \varepsilon_n, \\ 1, & u \geq \varepsilon_n. \end{cases}$$

als eine lineare Interpolation von $\mathbb{1}_{\{u \geq \varepsilon_n\}}$. Definiere nun

$$\bar{\nu}_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \big(H_n(t - Z_i) - \mathbb{E}H_n(t - Z_1)\big)$$

als Approximation des empirischen Prozesses $\nu_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \big(\mathbb{1}_{\{Z_i \leq t\}} - t\big)$. Zeigen Sie

$$\bar{\nu}_n \xrightarrow{D} W^\circ \quad \text{in } (C[0,1], \|\cdot\|_\infty),$$

wobei W° eine Brownsche Brücke ist, indem Sie die folgenden Schritte durchführen:

(a) Zeigen Sie, dass für alle $t \in [0,1]$ gilt: $|\mathbb{E}H_n(t - Z_1) - t| \leq \varepsilon_n$.

(b) Zeigen Sie, dass für festes $t \in [0,1]$ gilt: $|\bar{\nu}_n(t) - \nu_n(t)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
Hinweis: Nutzen Sie die Tschebyscheff-Ungleichung.

(c) Zeigen Sie, dass die endlichdimensionalen Verteilungen von $\bar{\nu}_n$ gegen diejenigen von W° konvergieren.
Hinweis: Gemäß (b) und Slutzky genügt es, dies für die endlichdimensionalen Verteilungen von ν_n zu zeigen.

Von nun an sei $\varepsilon_n = n^{-3/4}$.

(d) Zeigen Sie, dass H_n Lipschitz-stetig mit Konstante $\frac{1}{2\varepsilon_n}$ ist. Folgern Sie, dass

$$|\bar{\nu}_n(t) - \bar{\nu}_n(s)| \le \frac{\sqrt{n}}{\varepsilon_n}|t-s|.$$

(e) Zeigen Sie, dass im Fall $|t-s| \le \frac{1}{n^2}$ gilt: $|\bar{\nu}_n(t) - \bar{\nu}_n(s)|^4 \le |t-s|^{3/2}$.

(f) Definieren Sie

$$C_i := \big(H_n(t-Z_i) - \mathbb{E}H_n(t-Z_1)\big) - \big(H_n(s-Z_i) - \mathbb{E}H_n(s-Z_1)\big)$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[|\bar{\nu}_n(t) - \bar{\nu}_n(s)|^4] \le c \cdot \big\{\frac{1}{n}\mathbb{E}[C_1^4] + \mathbb{E}[C_1^2]^2\big\}$ mit einer geeigneten Konstante $c > 0$.

(g) Zeigen Sie, dass für $k \in \{2,4\}$ gilt: $\mathbb{E}[C_1^k] \le c_k \cdot |t-s|$ mit einer geeigneten Konstante $c_k > 0$.

(h) Folgern Sie aus (f) und (g), dass auch im Fall $|t-s| > \frac{1}{n^2}$ die Bedingung des Satzes 1.35 erfüllt ist.

Aufgabe A3 (Eine Folgerung aus dem Satz von Donsker, 4 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $Z_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. mit $\mathbb{E}Z_1 = 0$, $\mathrm{Var}(Z_1) = \sigma^2$ und $\mathbb{E}[Z_1^4] < \infty$. Definiere

$$S_k := \sum_{i=1}^{k} Z_i, \qquad k \in \{0, ..., n\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{k\in\{0,\dots,n\}} S_k \xrightarrow{D} \max_{t\in[0,1]} W(t),$$

wobei $W = (W(t))_{t\in[0,1]}$ eine stetige Brownsche Bewegung ist.
Hinweis: Wenden Sie ein geeignetes Funktional auf den Satz von Donsker an. Eliminieren Sie dann den Interpolationsterm mittels Lipschitz-Stetigkeit des Funktionals und dem Satz von Slutzky (vgl. Beispiel 1.37).

Abgabe bis Mittwoch 19:00 Uhr, 17.05.2023, im Zettelkasten 01 im Mathematikon INF205, 1. Etage.
Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`