Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Abgabeblatt 2 - Lösungen

Aufgabe A1 (Schwache Konvergenz, 6 = 3 + 3 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (S, d) ein metrischer Raum ausgestattet mit der Borelschen Sigma-Algebra $\mathcal{B}(S)$. Seien $Y_n, X_n, X : \Omega \to S$ messbare Abbildungen, und $c \in S$. Zeigen Sie:

(i) Es gilt

$$X_n \overset{D}{\to} c \quad \Longleftrightarrow \quad X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} c$$

Hinweis: Für reellwertige Zufallsvariablen ist diese Aussage bereits bekannt. Sie können das CMT nutzen...

(ii) Versieht man $S \times S$ mit der Produkt-Sigma-Algebra und der Produkt-Metrik

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2),$$

so gilt

$$X_n \overset{D}{\to} X, \quad Y_n \overset{\mathbb{P}}{\to} c \quad \Rightarrow \quad (X_n, Y_n) \overset{D}{\to} (X, c).$$

Hinweis: Reduzieren Sie mittels des Satzes von Slutzky die Aussage zunächst darauf, dass nur $(X_n, c) \overset{D}{\to} (X, c)$ gezeigt werden muss.

Lösung

(i) '$\Leftarrow$': (wurde bereits in VL allgemeiner gezeigt). Es gelte $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} c$. Für $Y_n := c$ gilt also $d(Y_n, X_n) = d(c, X_n) \overset{\mathbb{P}}{\to} 0$. Außerdem gilt $Y_n = c \overset{D}{\to} c$. Damit ist mit dem Satz von Slutzky $X_n \overset{D}{\to} c$.
'$\Rightarrow$': Es gelte $X_n \overset{D}{\to} c$. Die Abbildung

$$g : S \to \mathbb{R}, \quad g(x) = d(x, c)$$

ist Lipschitz-stetig mit Konstante 1 (und damit stetig), denn mit der Dreiecksungleichung der Metrik folgt

$$d(x, c) - d(y, c) \leq [d(x, y) + d(y, c)] - d(y, x) = d(x, y)$$

und

$$d(y, c) - d(x, c) \leq [d(y, x) + d(x, c)] - d(x, c) = d(y, x) = d(x, y),$$

also

$$|d(x, c) - d(y, c)| \leq d(x, y).$$

Mit dem Continuous mapping theorem angewandt auf $X_n \xrightarrow{D} c$ und g folgt

$$d(X_n, c) = g(X_n) \xrightarrow{D} g(c) = d(c, c) = 0.$$

Da 0 eine Konstante ist, folgt mit dem bereits bekannten Resultat in $\mathbb{R}$, dass auch $d(X_n, c) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
Das bedeutet $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$.

(ii) Wir zeigen:

- 1) $d((X_n, Y_n), (X_n, c)) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$
- 2) $(X_n, c) \xrightarrow{D} (X, c)$.

Dann folgt mit dem Satz von Slutzky $(X_n, Y_n) \xrightarrow{D} (X, c)$.
Beweis der beiden Aussagen 1) und 2):

- Zu 1): Es gilt laut Voraussetzung $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$, also

$$d((X_n, Y_n), (X_n, c)) = d(X_n, X_n) + d(Y_n, c) = 0 + d(Y_n, c) = d(Y_n, c) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

- Zu 2): Nutze das Portmanteau-Lemma. Sei $A \subset S \times S$ abgeschlossen. Dann ist

$$\mathbb{P}((X_n, c) \in A) = \mathbb{P}(X_n \in A_c)$$

mit $A_c := \{x \in S : (x, c) \in A\}$. Auch A_c ist abgeschlossen, denn: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A_c$ Folge mit $d(x_n, x) \to 0$ für ein $x \in S$.
Dann ist $(x_n, c) \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $d((x_n, c), (x, c)) = d(x_n, x) + d(c, c) = d(x_n, x) \to 0$, das heißt, $(x_n, c) \to (x, c)$. Da A abgeschlossen ist, folgt $(x, c) \in A$ und daher $x \in A_c$.

Da A_c abgeschlossen und $X_n \xrightarrow{D} X$, folgt mit Portmanteau:

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}((X_n, c) \in A) = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in A_c) \leq \mathbb{P}(X \in A_c) = \mathbb{P}((X, c) \in A),$$

und wieder mit Portmanteau $(X_n, c) \xrightarrow{D} (X, c)$.

Aufgabe A2 (Stetige Funktionale, 6 = 2 + 2 + 2 Punkte).

Wir betrachten den metrischen Raum $(C(T), \|\cdot\|_\infty)$ mit $T \subset \mathbb{R}$ kompakt. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionale stetig sind. Hierbei sei der Bildraum entweder ebenfalls mit $\|\cdot\|_\infty$ oder mit dem üblichen Abstand auf $\mathbb{R}$ ausgestattet.

$$\begin{aligned}
(a) \quad \Phi : C(T) \to \mathbb{R}, \quad \Phi(f) &= \int_T f(t)^2 dt \\
(b) \quad \Phi : C(T) \to C(T), \quad \Phi(f) &= \big[g : T \to \mathbb{R}, g(t) = f(t) - t \cdot f(1)\big] \\
(c) \quad \Phi : C(T) \to \mathbb{R}, \quad \Phi(f) &= \max_{t\in T} f(t)
\end{aligned}$$

Achtung: In (c) ist Φ *<u>nicht</u>* $\|\cdot\|_\infty$.

Lösung:

(a) Für $f, f_0 \in C(T)$ gilt für alle $t \in T$:

$$\begin{aligned} |f(t)^2 - f_0(t)^2| &= |f(t) - f_0(t)| \cdot |f(t) + f_0(t)| \\ &\leq |f(t) - f_0(t)| \cdot \big(|f(t) - f_0(t)| + 2|f_0(t)|\big) \\ &\leq \|f - f_0\|_\infty \cdot \big(\|f - f_0\|_\infty + 2\|f_0\|_\infty\big). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} |\Phi(f) - \Phi(f_0)| &= \Big| \int_T f(t)^2 dt - \int_T f_0(t)^2 dt \Big| \\ &\leq \int_T |f(t)^2 - f_0(t)^2| dt \\ &\overset{s.o.}{\leq} \int_T \|f - f_0\|_\infty \cdot \big(\|f - f_0\|_\infty + 2\|f_0\|_\infty\big) dt \\ &\leq \lambda(T) \cdot \|f - f_0\|_\infty \cdot \big(\|f - f_0\|_\infty + 2\|f_0\|_\infty\big). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\lambda(T)$ das Lebesgue-Maß von T. Dieses ist endlich, da $T \subset \mathbb{R}$ kompakt und daher beschränkt ist. Auch $\|f_0\|_\infty$ ist endlich, da f_0 stetig und T kompakt.
Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(T)$ eine Folge mit $\|f_n - f_0\|_\infty$. Dann gilt

$$|\Phi(f_n) - \Phi(f)| \leq \lambda(T) \cdot \underbrace{\|f_n - f_0\|_\infty}_{\to 0} \cdot \big(\underbrace{\|f_n - f_0\|_\infty}_{\to 0} + 2\|f_0\|_\infty\big) \to \lambda(T) \cdot 0 \cdot \big(0 + 2\|f_0\|_\infty\big) = 0.$$

Damit ist Φ stetig.

(b) Für $f, f_0 \in C(T)$ gilt für alle $t \in T$:

$$\begin{aligned} |\Phi(f)(t) - \Phi(f_0)(t)| &= \big| \big[f(t) - tf(1)\big] - \big[f_0(t) - tf_0(1)\big] \big| \\ &\leq \big|f(t) - f_0(t)\big| + |t| \cdot \big|f(1) - f_0(1)\big| \\ &\leq \|f - f_0\|_\infty + D \cdot \|f - f_0\|_\infty \\ &= (D + 1) \cdot \|f - f_0\|_\infty, \end{aligned}$$

wobei $D := \max\{|t| : t \in T\}$ das betragsmäßig maximale Element von T ist (dieses ist endlich, da T kompakt und daher beschränkt).
Damit ist Φ sogar Lipschitz-stetig mit Konstante $D + 1$, also auch stetig.

(c) Seien $f, f_0 \in C(T)$. Dann gilt für alle $t \in T$:

$$f(t) = f(t) - f_0(t) + f_0(t) \leq |f(t) - f_0(t)| + f_0(t) \leq \|f - f_0\|_\infty + f_0(t),$$

also

$$\max_{t\in T} f(t) \leq \|f - f_0\|_\infty + \max_{t\in T} f_0(t)$$

bzw.

$$\max_{t\in T} f(t) - \max_{t\in T} f_0(t) \leq \|f - f_0\|_\infty.$$

Anwendung desselben Vorgehens mit vertauschten Rollen für f, f_0 liefert

$$\max_{t\in T} f_0(t) - \max_{t\in T} f(t) \leq \|f_0 - f\|_\infty = \|f - f_0\|_\infty.$$

Damit ist gezeigt, dass

$$\big|\Phi(f) - \Phi(f_0)\big| = \Big| \max_{t\in T} f(t) - \max_{t\in T} f_0(t) \Big| \leq \|f - f_0\|_\infty.$$

Die Abbildung Φ ist also Lipschitz-stetig mit Konstante 1, also auch stetig.

Aufgabe A3 (Eine erste schwache Konvergenz, 6 = 3 + 3 Punkte).

Sei $T \subset \mathbb{R}$ kompakt und konvex (d.h. $T = [a, b]$). Wir betrachten im Folgenden den metrischen Raum $(C(T), \|\cdot\|_\infty)$. Für Zufallsvariablen $X_n, X : \Omega \to C(T)$ wurde in der Vorlesung gezeigt, dass $X_n \xrightarrow{D} X$ genau dann, wenn

(A) für alle $k \in \mathbb{N}$, $t_1, ..., t_k \in T$ gilt: $(X_n(t_1), ..., X_n(t_k)) \xrightarrow{D} (X(t_1), ..., X(t_k))$, und

(B) (X_n) stochastisch gleichgradig stetig ist.

Wir betrachten nun i.i.d. T-wertige Zufallsvariablen Z_i, $i \in \mathbb{N}$ und den Prozess

$$X_n(t) := \sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |Z_i - t| - \mathbb{E}|Z_1 - t|\Big)$$

(i) Definieren Sie einen geeigneten Gauß-Prozess $(X(t))_{t\in T}$, so dass (A) erfüllt ist, und weisen Sie (A) nach.
Der multivariate Zentrale Grenzwertsatz in $\mathbb{R}^k$ darf vorausgesetzt werden.

(ii) Nehmen Sie nun an, dass (B) erfüllt ist, also $X_n \xrightarrow{D} X$ gilt. Sei $\overline{Z_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i$. Zeigen Sie, dass in $\mathbb{R}$ gilt:

$$\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |Z_i - \overline{Z_n}| - \mathbb{E}[|Z_1 - t|]\big|_{t=\overline{Z_n}}\Big) \xrightarrow{D} N\big(0, \mathrm{Var}(|Z_1 - \mathbb{E}Z_1|)\big).$$

Hinweis: Nutzen Sie Präsenzblatt 2, Aufgabe P2(b).

Lösung: *Anmerkung: In einer früheren Version war T nur als kompakt vorausgesetzt. Damit aber auch garantiert werden kann, dass $\overline{X_n}, \mathbb{E}Z_1 \in T$, wurde zusätzlich T konvex (und damit $T = [a, b]$) vorausgesetzt.*

(i) Seien $k \in \mathbb{N}$, $t_1, ..., t_k \in T$. Da die Z_i i.i.d. sind, sind auch die Zufallsvektoren

$$\Big(|Z_i - t_1|, ..., |Z_i - t_k|\Big), \quad i \in \mathbb{N}$$

i.i.d.
Außerdem gilt für alle $j \in \{1, ..., k\}$: $\mathbb{E}[|Z_1 - t_j|^2] \le 2(\mathbb{E}[|Z_1|^2] + |t_j|^2) \le 4D < \infty$ mit $D = \max\{|t| : t \in T\}$ (endlich, da T kompakt). Mit dem multivariaten zentralen Grenzwertsatz folgt

$$\begin{pmatrix} X_n(t_1) \\ \vdots \\ X_n(t_k) \end{pmatrix} = \sqrt{n} \cdot \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} |Z_i - t_1| \\ \vdots \\ |Z_i - t_k| \end{pmatrix} - \mathbb{E}\begin{pmatrix} |Z_1 - t_1| \\ \vdots \\ |Z_1 - t_k| \end{pmatrix}\Big) \xrightarrow{D} N(0, \Sigma)$$

mit $\Sigma_{jk} = \mathrm{Cov}(|Z_1 - t_j|, |Z_1 - t_k|)$.
Sei nun also $X = (X(t))_{t\in T}$ ein stetiger zentrierter Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion $\gamma(s, t) = \mathrm{Cov}(|Z_1 - s|, |Z_1 - t|)$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} X_n(t_1) \\ \vdots \\ X_n(t_k) \end{pmatrix} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix} X(t_1) \\ \vdots \\ X(t_k) \end{pmatrix},$$

das heißt, die endlichdimensionalen Verteilungen von X_n konvergieren gegen diejenigen von X. (A) ist gezeigt.

(ii) Laut Präsenzblatt 2, Aufgabe P2(b) ist

$$\Phi : C(T) \times T \to \mathbb{R}, \quad \Phi(f, x) = f(x)$$

stetig. Da $\mathbb{E}|Z_1| \leq D < \infty$ gilt laut dem starken Gesetz der großen Zahlen in $\mathbb{R}$:

$$\overline{Z_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}Z_1.$$

Zusammen mit A1(ii) (angewandt mit zwei verschiedenen metrischen Räumen, gleiches Prinzip):

$$(X_n, \overline{Z_n}) \xrightarrow{D} (X, \mathbb{E}Z_1).$$

Es folgt mit dem CMT

$$\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |Z_i - t| - \mathbb{E}[|Z_1 - t|]\Big|_{t=\overline{Z_n}}\Big) = X_n(\overline{Z_n}) = \Phi(X_n, \overline{Z_n}) \xrightarrow{D} \Phi(X, \mathbb{E}Z_1) = X(\mathbb{E}Z_1).$$

Da X Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion $\gamma(s,t) = \mathrm{Cov}(\mathbb{E}|Z_1 - s|, \mathbb{E}|Z_1 - t|)$:

$$X(t) \sim N(0, \gamma(t,t)) = N(0, \mathrm{Var}(|Z_1 - t|)).$$

Es ist damit

$$X(\mathbb{E}Z_1) \sim N(0, \mathrm{Var}(|Z_1 - \mathbb{E}Z_1|)).$$

und die Aussage gezeigt.

Abgabe bis Donnerstag 11:00 Uhr, 11.05.2023, im Zettelkasten 01 im Mathematikon INF205, 1. Etage.
Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`