Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Abgabeblatt 2

Aufgabe A1 (Schwache Konvergenz, 6 = 3 + 3 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (S, d) ein metrischer Raum ausgestattet mit der Borelschen Sigma-Algebra $\mathcal{B}(S)$. Seien $Y_n, X_n, X : \Omega \to S$ messbare Abbildungen, und $c \in S$. Zeigen Sie:

(i) Es gilt

$$X_n \xrightarrow{D} c \quad \Longleftrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$$

Hinweis: Für reellwertige Zufallsvariablen ist diese Aussage bereits bekannt. Sie können das CMT nutzen...

(ii) Versieht man $S \times S$ mit der Produkt-Sigma-Algebra und der Produkt-Metrik

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2),$$

so gilt

$$X_n \xrightarrow{D} X, \quad Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c \quad \Rightarrow \quad (X_n, Y_n) \xrightarrow{D} (X, c).$$

Hinweis: Reduzieren Sie mittels des Satzes von Slutzky die Aussage zunächst darauf, dass nur $(X_n, c) \xrightarrow{D} (X, c)$ gezeigt werden muss.

Aufgabe A2 (Stetige Funktionale, 6 = 2 + 2 + 2 Punkte).

Wir betrachten den metrischen Raum $(C(T), \|\cdot\|_\infty)$ mit $T \subset \mathbb{R}$ kompakt. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionale stetig sind. Hierbei sei der Bildraum entweder ebenfalls mit $\|\cdot\|_\infty$ oder mit dem üblichen Abstand auf $\mathbb{R}$ ausgestattet.

$$\begin{aligned}
(a) \quad \Phi : C(T) \to \mathbb{R}, \quad \Phi(f) &= \int_T f(t)^2 dt \\
(b) \quad \Phi : C(T) \to C(T), \quad \Phi(f) &= \big[g : T \to \mathbb{R}, g(t) = f(t) - t \cdot f(1)\big] \\
(c) \quad \Phi : C(T) \to \mathbb{R}, \quad \Phi(f) &= \max_{t \in T} f(t)
\end{aligned}$$

Achtung: In (c) ist Φ nicht $\|\cdot\|_\infty$.

Aufgabe A3 (Eine erste schwache Konvergenz, 6 = 2 + 2 + 2 Punkte).

Sei $T \subset \mathbb{R}$ kompakt und konvex (d.h. $T = [a, b]$). Wir betrachten im Folgenden den metrischen Raum $(C(T), \|\cdot\|_\infty)$. Für Zufallsvariablen $X_n, X : \Omega \to C(T)$ wurde in der Vorlesung gezeigt, dass $X_n \xrightarrow{D} X$ genau dann, wenn

(A) für alle $k \in \mathbb{N}$, $t_1, ..., t_k \in T$ gilt: $(X_n(t_1), ..., X_n(t_k)) \xrightarrow{D} (X(t_1), ..., X(t_k))$, und

(B) (X_n) stochastisch gleichgradig stetig ist.

Wir betrachten nun i.i.d. T-wertige Zufallsvariablen Z_i, $i \in \mathbb{N}$ und den Prozess

$$X_n(t) := \sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |Z_i - t| - \mathbb{E}|Z_1 - t|\Big)$$

(i) Definieren Sie einen geeigneten Gauß-Prozess $(X(t))_{t \in T}$, so dass (A) erfüllt ist, und weisen Sie (A) nach.
Der multivariate Zentrale Grenzwertsatz in $\mathbb{R}^k$ darf vorausgesetzt werden.

(ii) Nehmen Sie nun an, dass (B) erfüllt ist, also $X_n \xrightarrow{D} X$ gilt. Sei $\overline{Z_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$. Zeigen Sie, dass in $\mathbb{R}$ gilt:

$$\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |Z_i - \overline{Z_n}| - \mathbb{E}[|Z_1 - t|]\big|_{t=\overline{Z_n}}\Big) \xrightarrow{D} N\big(0, \mathrm{Var}(|Z_1 - \mathbb{E}Z_1|)\big).$$

Hinweis: Nutzen Sie Präsenzblatt 2, Aufgabe P2(b).

Abgabe bis Donnerstag 11:00 Uhr, 11.05.2023, im Zettelkasten 01 im Mathematikon INF205, 1. Etage.
Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`