Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Abgabeblatt 1 - Lösungen

Aufgabe A1 (Brownsche Bewegung, 4 = 2 + 2 Punkte).
Es sei $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

(a) Für $t \geq 0$ definiere
$$X_t := -W_t.$$
Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Brownschen Bewegung, dass $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ wieder eine Brownsche Bewegung ist.

(b) Sei $a \in [0,\infty)$. Für $t \geq 0$ definiere
$$Y_t := W_{t+a} - W_a$$
Zeigen Sie mit Hilfe der Charakterisierung von Brownschen Bewegungen als Gauß-Prozess, dass $(Y_t)_{t\in[0,\infty)}$ wieder eine Brownsche Bewegung ist.

Lösung:

(a) Zu zeigen sind (W1)-(W4).

(W1) Es ist, da W eine BB ist und damit (W1) erfüllt,
$$X_0 = -W_0 = 0 \quad \mathbb{P}-\text{f.s.}$$

(W2) Seien $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$. Da W BB ist und damit (W2) erfüllt, sind die einzelnen Einträge in $(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})_{i=1,...,n}$ unabhängig. Damit sind
$$X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = - \cdot (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$
als Funktionen unterschiedlicher, unabhängiger Zufallsvariablen unabhängig.

(W3) Sei $0 \leq s < t$. Da W BB ist, gilt nach (W3): $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$. Damit ist auch
$$X_t - X_s = -(W_t - W_s) \sim N((-1)\cdot 0, (-1)^2 \cdot (t-s)) = N(0, t-s).$$

(W4) Da W BB, ist nach (W4): $t \mapsto W_t$ $\mathbb{P}$-f.s. stetig. Damit ist auch $t \mapsto X_t(\omega) = -W_t(\omega)$ $\mathbb{P}$-f.s. stetig als Komposition der stetigen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = -x$ und $t \mapsto W_t(\omega)$.

(b) Zu zeigen ist (W123) und (W4).

(W123) Seien $0 \leq t_1 < ... < t_n$. Da W eine Brownsche Bewegung ist und (W123) erfüllt, gilt wegen $0 \leq a \leq t_1 + a < ... < t_n + a$, dass

$$\begin{pmatrix} W_a \\ W_{t_1+a} \\ \vdots \\ W_{t_n+a} \end{pmatrix} \sim N(0, \Sigma)$$

mit geeigneter Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$. Es folgt

$$\begin{pmatrix} Y_{t_1} \\ \vdots \\ Y_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{t_1+a} - W_a \\ \vdots \\ W_{t_n+a} - W_a \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} W_a \\ W_{t_1+a} \\ \vdots \\ W_{t_n+a} \end{pmatrix} \sim N(0, A\Sigma A'),$$

das heißt, die endlichdimensionalen Verteilungen von $(Y_t)_{t\geq 0}$ sind multivariate Normalverteilungen mit Mittelwert 0. Damit ist die Mittelwertfunktion von $(Y_t)_{t\geq 0}$ die Nullfunktion.
Es ist nun gezeigt, dass $(Y_t)_{t\geq 0}$ zentrierter Gauß-Prozess ist. Berechne die Kovarianzfunktion: Für $s, t \geq 0$ ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(Y_s, Y_t) &= \operatorname{Cov}(W_{s+a} - W_a, W_{t+a} - W_a) \\ &= \operatorname{Cov}(W_{s+a}, W_{t+a}) - \operatorname{Cov}(W_{s+a}, W_a) - \operatorname{Cov}(W_a, W_{t+a}) + \operatorname{Cov}(W_a, W_a) \\ &= \min\{s+a, t+a\} - a - a + a = \min\{s+a, t+a\} - a = \min\{s, t\}. \end{aligned}$$

- Da W Brownsche Bewegung ist, ist $t \mapsto W_t$ $\mathbb{P}$-f.s. stetig. Für festes $\omega \in \Omega$ sind die Funktionen $g : [0, \infty) \to [0, \infty), g(x) = x + a$, $h(x) = x - W_a(\omega)$ ebenfalls stetig. Damit ist

$$t \mapsto Y_t = h(W_{g(t)})$$

ebenfalls $\mathbb{P}$-f.s. stetig als Komposition stetiger Funktionen.

Aufgabe A2 (Eigenschaften von Brownschen Bewegungen, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).
Sei $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Nehmen Sie an, dass $t \mapsto W_t$ stetig ist (ohne $\mathbb{P}$-f.s.). Definiere

$$A := \{\omega \in \Omega : \text{Auf allen Intervallen } [a,b] \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ ist } t \mapsto W_t(\omega) \text{ nicht monoton wachsend}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $A = A'$ mit

$$A' = \{\omega \in \Omega : \text{Auf allen Intervallen } [a,b] \text{ mit } a, b \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \text{ ist } t \mapsto W_t \text{ nicht monoton wachsend}\}$$

(b) Betrachten Sie für festes $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$M_{a,b,n} := \{\omega \in \Omega : W_a(\omega) \leq W_{a+\frac{b-a}{n}}(\omega) \leq W_{a+2\frac{b-a}{n}}(\omega) \leq ... \leq W_{a+n\frac{b-a}{n}}(\omega) = W_b(\omega)\}.$$

Berechnen Sie $\mathbb{P}(M_{a,b,n})$ und zeigen Sie $\mathbb{P}(M_{a,b,n}) \to 0$ $(n \to \infty)$.

(c) Setzen Sie A' in Beziehung mit $M_{a,b,n}$ und folgern Sie $\mathbb{P}(A) = 1$.

Lösung:

(a) Formalisierung der Mengen:

$$\begin{aligned} A &= \{\omega \in \Omega : \forall a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}, a < b, \exists s, t \in [a, b] : s \leq t \text{ und } W_s(\omega) > W_t(\omega)\}, \\ A' &= \{\omega \in \Omega : \forall a, b \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, a < b, \exists s, t \in [a, b] : s \leq t \text{ und } W_s(\omega) > W_t(\omega)\}. \end{aligned}$$

Nun gilt $A \subset A'$, denn:

- '$\subset$': ('offensichtlich') Sei $\omega \in A$.
  Seien $a, b \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ mit $a < b$. Da $\omega \in A$, gibt es $s, t \in [a, b]$ mit $W_s(\omega) > W_t(\omega)$. Damit ist $\omega \in A'$.
- '$\supset$': Sei $\omega \in A'$.
  Seien $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a < b$. Wähle $a', b' \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ mit $[a', b'] \subset [a, b]$. Dies ist möglich, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Da $\omega \in A'$. Da $\omega \in A'$, gibt es $s, t \in [a', b']$ mit $W_s(\omega) > W_t(\omega)$. Dann ist auch $s, t \in [a, b]$ und damit $\omega \in A$.

(b) Es ist, da die Zuwächse der BB unabhängig sind,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_{a,b,n}) &= \mathbb{P}\big(\forall i \in \{1, ..., n\} : W_{a+(i-1)\frac{b-a}{n}} \leq W_{a+i\frac{b-a}{n}}\big) \\ &= \mathbb{P}\big(\forall i \in \{1, ..., n\} : W_{a+(i-1)\frac{b-a}{n}} - W_{a+i\frac{b-a}{n}} \leq 0\big) \\ &\overset{\text{unabh.}}{=} \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}\big(\underbrace{W_{a+(i-1)\frac{b-a}{n}} - W_{a+i\frac{b-a}{n}}}_{\sim N(0, \frac{b-a}{n})} \leq 0\big)}_{=\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^n} \quad \to \quad 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned} (A')^c &= \{\omega \in \Omega : \exists a, b \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, a < b, \forall s, t \in [a, b] \text{ mit } s \leq t : W_s(\omega) \leq W_t(\omega)\} \\ &= \bigcup_{a, b \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, a < b} \big\{\omega \in \Omega : \forall s, t \in [a, b] \text{ mit } s \leq t : W_s(\omega) \leq W_t(\omega)\big\}. \end{aligned}$$

Nun gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$M_{a,b} := \big\{\omega \in \Omega : \forall s, t \in [a, b] \text{ mit } s \leq t : W_s(\omega) \leq W_t(\omega)\big\} \subset M_{a,b,n}.$$

Es folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(M_{a,b}) \leq \mathbb{P}(M_{a,b,n}) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Damit ist

$$\mathbb{P}((A')^c) \leq \sum_{a, b \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, a < b} \underbrace{\mathbb{P}(M_{a,b})}_{=0} = 0.$$

Also $\mathbb{P}(A') = 1$.

Aufgabe A3 (Die Räume der stetigen Funktionen, 6 = 2 + 4 Punkte).

Für $k > 0$ sei der Raum $C[0,k] = \{f : [0,k] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,k]} |f(x)|$. *Es ist bekannt, dass $(C[0,k], \|\cdot\|_\infty)$ vollständig ist.*

- Zeigen Sie, dass $(C[0,k], \|\cdot\|_\infty)$ separabel ist.
  Hinweis: Konstruieren Sie eine abzählbar dichte Teilmenge, zum Beispiel wie folgt: Für $n \in \mathbb{N}$, $q_0, ..., q_n \in \mathbb{Q}$ sei $f_{n,q_0,...,q_n} \in C[0,k]$ die lineare Interpolation der Punkte $(\frac{i}{n}k, q_i)$ für $i = 0, ..., n$. Für beliebiges $f \in C[0,k]$ und $\varepsilon > 0$ nutzen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist und finden Sie $f_{n,q_0,...,q_n}$ mit $\|f - f_{n,q_0,...,q_n}\|_\infty < \varepsilon$.

- Definiere nun auf $C[0,\infty) = \{f : [0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ die Norm

$$\|f\|_\infty := \sum_{k=1}^{\infty} \min\{2^{-k}, \sup_{x\in[0,k]} |f(x)|\}.$$

  ('gleichmäßige Konvergenz auf Kompakta').
  Zeigen Sie, dass $(C[0,\infty), \|\cdot\|_\infty)$ polnisch ist.

Lösung:

(a) Wir müssen zeigen, dass eine abzählbar dichte Teilmenge von $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ existiert. Wir definieren dazu

$$M := \{f_{n,q_0,...,q_n} : n \in \mathbb{N}, q_0, ..., q_n \in \mathbb{Q}\},$$

wobei $f_{n,q_0,...,q_n}$ gegeben sind wie im Hinweis. M is abzählbar, da

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_{n,q_0,...,q_n} : q_0, ..., q_n \in \mathbb{Q}\},$$

das heißt, es ist eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen (da $\mathbb{Q}^n$ abzählbar ist für alle $n \in \mathbb{N}$).

Wir zeigen nun, dass M dicht in $C[0,1]$ liegt: Sei $\varepsilon > 0$ und $f \in C[0,1]$. Da $[0,1]$ kompakt ist, ist f gleichmäßig stetig. Daher gibt es $\delta > 0$ mit

$$|x-y| \le \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (*)$$

Wähle $n \in \mathbb{N}$ groß genug, dass $\frac{1}{n} < \delta$. Sei g die lineare Interpolation mit den Stützstellen $g(i/n) = f(i/n)$ für $i = 0, ..., n$. Für $i \in \{0, ..., n-1\}$ sei $x \in [i/n, (i+1)/n]$. Dann gilt

$$f(x), g(x) \in [\min_{y\in[i/n,(i+1)/n]} f(y), \max_{x\in[i/n,(i+1)/n]} f(y)].$$

Aufgrund von (*) gilt

$$\max_{y\in[i/n,(i+1)/n]} f(y) - \min_{y\in[i/n,(i+1)/n]} f(y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daher gilt für alle $x \in [0,1]$:

$$|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

also $\|f-g\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2}$.
Es gibt rationale Zahlen $q_0, ..., q_n \in \mathbb{Q}$ mit $|f(i/n) - q_i| < \varepsilon/2$. Da g und $f_{n,q_0,...,q_n}$ stückweise lineare Funktionen mit den gleichen Stützstellen sind, ist

$$\|g - f_{n,q_0,...,q_n}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

(der größte Abstand zwischen zwei solchen Funktionen tritt an den Stützpunkten auf). Insgesamt folgt

$$\|f - f_{n,q_0,...,q_n}\|_\infty \le \|f-g\|_\infty + \|g - f_{n,q_0,...,q_n}\|_\infty < \varepsilon,$$

also ist M dicht in $C[0,1]$.

(b) Sei $\|f\|_{\infty,k} := \sup_{x\in[0,k]} |f(x)|$.
(Achtung: In der Lösung gehen wir etwas salopp mit den Einschränkungen um, weil es darauf nicht ankommt. Ist also $f \in C[0,\infty)$, so meinen wir $\|f\|_{\infty,k} = \|f\big|_{[0,k]}\|_{\infty,k}$, schreiben das aber nicht immer).
Als erstes zeigen wir die Äquivalenz

$$\|f_n\|_\infty \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}: \quad \|f_n\|_{\infty,k} \to 0 \quad (*).$$

"$\Rightarrow$": Falls $0 \le \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} \wedge \|f_n\|_{\infty,k} \to 0$ for $k \to \infty$, dann muss jedes Element der Summe gegen 0 konvergieren. Daher ist $2^{-k} \wedge \|f_n\|_{\infty,k} \to 0$, also $\|f_n\|_{\infty,k} \to 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
"$\Leftarrow$": Es gelte für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $\|f_n\|_{\infty,k} \to 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $K \in \mathbb{N}$ so dass $2^{-K} < \varepsilon/2$, und sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \ \ge N$, für alle $k = 1, ..., K$: $\forall n \ge N : \|f_n\|_{\infty,k} \le \frac{\varepsilon}{2K}$.
Dann gilt für $n \ \ge N$:

$$\|f_n\|_\infty = \sum_{k=1}^{N} 2^{-k} \wedge \|f_n\|_{\infty,k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k} \le K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + 2^{-K} < \varepsilon.$$

(Ende des Beweises von (*)).

Nun wird gezeigt, dass $(C([0,\infty), \|\cdot\|_\infty)$ polnischer Raum ist:

- Vollständigkeit: Falls $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(C[0,\infty), \|\cdot\|_\infty)$ ist, folgt in gleicher Weise wie in (*) dass $(f^{(n)}\big|_{[0,k]})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $(C[0,k], \|\cdot\|_{\infty,k})$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist. Da $(C[0,k], \|\cdot\|_{\infty,k})$ vollständig, konvergiert $(f^{(n)}\big|_{[0,k]})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion. Für festes $x \in [0,\infty)$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $x \in [0,k]$, und wir definieren
$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x).$$
Dann konvergiert offensichtlich $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in jedem $(C[0,k], \|\cdot\|_{\infty,k})$ gegen f, das heißt $\|f_n - f\|_{\infty,k} \to 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Mit (*) folgt $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.
- Separabilität: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $(C[0,k], \|\cdot\|_{\infty,k})$ separabel. Sei $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbar dichte Teilmenge von $(C[0,k], \|\cdot\|_{\infty,k})$. Definiere dann

$$g_n^{(k)} : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad g_n^{(k)}(x) = \begin{cases} f_n^{(k)}(x), & x \in [0,k], \\ f_n^{(k)}(k), & x > k \end{cases}$$

einfach als konstante stetige Fortsetzung außerhalb des Intervalls $[0, k]$. Setze

$$A \;:=\; \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{g_n^{(k)} : n \in \mathbb{N}\} \subset C[0,\infty).$$

A ist abzählbar als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen.
Wir zeigen nun, dass A dicht in $(C[0,\infty), \|\cdot\|_\infty)$ ist.
Sei $f \in C[0,\infty)$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Wähle $K \in \mathbb{N}$ mit $2^{-K} < \frac{\varepsilon}{2}$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n^K - f\|_{\infty,K} < \frac{\varepsilon}{2K}$. Dann folgt

$$\|f - g_n^K\|_\infty \le \sum_{k=1}^{K} \|f_n^K - f\|_{\infty,k} + \sum_{k=K+1}^{\infty} 2^{-k} < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \underbrace{2^{-K}}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon.$$

Aufgabe A4 (Schwache Konvergenz, 2 Punkte).
Es sei $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ der Raum der stetigen Funktionen mit der Supremumsnorm. Es seien $f_n, f \in C[0,1]$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig. Es sei

$$\delta_f : \mathcal{B}(C[0,1]) \to [0,1], \quad \delta_f(A) = \begin{cases} 1, & f \in A \\ 0, & f \notin A \end{cases}$$

das Dirac-Maß zu f. Zeigen Sie mit der Definition der schwachen Konvergenz, dass

$$\delta_{f_n} \xrightarrow{D} \delta_f \quad \text{in} \quad (C[0,1], \|\cdot\|_\infty).$$

Lösung: Zu zeigen ist eine schwache Konvergenz. Dies machen wir mit der Definition von schwacher Konvergenz auf metrischen Räumen.
Sei $g : C[0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann ist

$$\int g\delta_{f_n} = g(f_n), \qquad \int g\delta_f = g(f).$$

Es folgt

$$\Big|\int g\delta_{f_n} - \int g\delta_f\Big| = |g(f_n) - g(f)|.$$

Da $f_n \to f$ gleichmäßig, gilt $f_n \to f$ in $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Da $g : C[0,1] \to \mathbb{R}$ stetig ist, folgt $g(f_n) \to g(f)$, also

$$\Big|\int g\delta_{f_n} - \int g\delta_f\Big| = |g(f_n) - g(f)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`