Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Abgabeblatt 11

Aufgabe P1 (Anwendungen der Ito-Formel, Teil 1, 6 = 3 + 1 + 2 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $W = (W_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Version der Brownschen Bewegung.
In dieser Aufgabe wollen wir der Einfachheit halber annehmen, dass $W \in \mathcal{M}_2$.

(a) Zeigen Sie, dass für $\lambda > 0$

$$X_t = (W_t + t) \cdot e^{-W_t - \frac{1}{2}t}, \qquad Y_t = e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} \cosh(\lambda W_t)$$

Martingale sind, indem Sie die Prozesse zunächst mit der Ito-Formel in Standardform $(x + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s)$ schreiben.

(b) Berechnen Sie $\langle X \rangle_t$.

(c) Für die Prozesse

$$A_t = W_t + \int_0^t W_s ds + \int_0^t s dW_s, \qquad B_t = \int_0^t s^2 dW_s + \Big(\int_0^t W_s^2 ds \Big)^2,$$

berechnen Sie $\langle A, B \rangle_t$.

Aufgabe P2 (Anwendungen der Ito-Formel, Teil 2, 6 = 3 + 3 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $W = (W_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Version der Brownschen Bewegung.

(a) Gegeben sei die stochastische Differentialgleichung (SDGL)

$$dX_t = -\frac{1}{2} e^{-2X_t} dt + e^{-X_t} dW_t, \qquad X_0 = 1.$$

Ermitteln Sie eine explizite Darstellung von X_t, das heißt, lösen Sie die SDGL.
Hinweis: Definieren Sie $Y_t = e^{X_t}$ und berechnen Sie mittels der Ito-Formel dY_t.

(b) Gegeben sei nun die stochastische Differentialgleichung (SDGL)

$$dX_t = \mu \cdot dt + \sigma \cdot X_t dW_t, \qquad X_0 = \mu,$$

wobei $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ Parameter seien. Ermitteln Sie eine explizite Darstellung von X_t, das heißt, lösen Sie die SDGL.
Hinweis: Definieren Sie $F_t := e^{-\sigma W_t + \frac{\sigma^2}{2} t}$ und ermitteln Sie eine Darstellung von dF_t in Standardform. Definieren Sie dann $Y_t = F_t \cdot S_t$ und ermitteln Sie eine Darstellung von dY_t in Standardform. Finden Sie damit zunächst eine Lösung für Y_t.

Aufgabe P3 (Anwendung des stochastischen Exponentials, $6 = 2 + 3 + 1$ Punkte). Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein lokales Martingal. Es sei $\mathcal{E}(X) = \exp(X - X_0 - \frac{1}{2}\langle X\rangle)$ das stochastische Exponential von X. Es sei $\langle X\rangle$ ein **deterministischer Prozess**.

(a) Folgern Sie, dass für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\forall t \geq 0: \quad \mathbb{E}[e^{\lambda X_t}] = e^{\frac{\lambda^2 \langle X\rangle_t}{2}}.$$

Schließen Sie, dass $X_t \sim N(0, \langle X\rangle_t)$ für alle $t \geq 0$ gilt.
Hinweise: 1) Nutzen Sie Präsenzblatt 11, Aufgabe P3 (Novikov-Bedingung). 2) Die momenterzeugende Funktion bestimmt die Verteilung eindeutig.

(b) Zeigen Sie nun, dass X ein zentrierter Gauß-Prozess ist, indem Sie nachrechnen, dass für die multivariate momenterzeugende Funktion und für $t_1 \leq ... \leq t_n$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i X_{t_i}} = e^{\frac{1}{2}\underline{\lambda}^T \Sigma \underline{\lambda}}, \qquad \underline{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n)^T$$

mit Kovarianzmatrix $\Sigma = (\langle X\rangle_{\min(t_i,t_j)})_{i,j=1,...,n}$.
Hinweis: Martingaleigenschaft und Induktion.

(c) Folgern Sie die Levy-Charakterisierung der Brownschen Bewegung: Ist $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales Martingal mit $\langle X\rangle_t = t$ für alle $t \geq 0$, so ist X eine Brownsche Bewegung.

Abgabe bis Donnerstag 16:00 Uhr, 13.07.2023, im Zettelkasten 01 im Mathematikon INF205, 1. Etage.
Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`