Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Abgabeblatt 10

Aufgabe A1 (Quadratische Variation von Prozessen mit beschränkter Variation, 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X = (X_t)_{t\geq 0}, Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ zwei stetige stochastische Prozesse. Y habe beschränkte Variation, das heißt, für jedes $t \geq 0, \omega \in \Omega$ gilt

$$V_t(Y)(\omega) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{0=t_0<t_1<...<t_n=t} \sum_{i=0}^{n-1} \left|Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}\right| < \infty.$$

X habe einen quadratischen Variationsprozess $\langle X \rangle$. Zeigen Sie, dass für alle $t \geq 0$ gilt:

$$\langle X + Y \rangle_t = \langle X \rangle_t,$$

und insbesondere $\langle Y \rangle_t = 0$.

Aufgabe A2 (Nachweis von Ito-Integral-Eigenschaften mittels Definition, 8 = 4 + 4 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $W = (W_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Version der Brownschen Bewegung.
In dieser Aufgabe wollen wir der Einfachheit halber annehmen, dass $W \in \mathcal{M}_2$.

(a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\forall t \geq 0: \qquad \int_0^t s \cdot dW_s = tW_t - \int_0^t W_s ds \quad f.s.$$

Hinweis: Stellen Sie das stochastische Integral als Limes von stochastischen Integralen einfacher Funktionen dar, beispielsweise basierend auf der Zerlegungsfolge $t_k = \frac{k}{n} \cdot t$ ($k = 0, ..., n$) und $g_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k \cdot \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(s)$. Es gilt $\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}W_{t_{k+1}} - t_k W_{t_k}) = tW_t$.

(b) Zeigen Sie, dass für eine stetige Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\forall t \geq 0: \qquad \int_0^t g(s) dW_s \sim N\Big(0, \int_0^t g(s)^2 ds\Big).$$

Hinweise:

- *Nutzen Sie das gleiche Prinzip wie in (a), d.h., stellen Sie das stochastische Integral als L^2-Limes von stochastischen Integralen über einfache Funktionen dar.*
- *Es ist bekannt: Ist Z_n eine Folge von Zufallsvariablen mit $Z_n \sim N(0, \sigma_n^2)$ und gilt $\sigma_n^2 \to \sigma^2$, dann gilt auch $Z_n \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$.*

Aufgabe A3 (Erhaltungseigenschaft des Ito-Integrals, 6 = 2 + 2 + 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(W_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Version der Brownschen Bewegung mit kanonischer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, welche die üblichen Annahmen erfüllt. Zeigen Sie:

(a) Der Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ mit $X_t = \int_0^t |W_s| dW_s$ ist ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingal.
Hinweis: Nutzen Sie, dass stochastische Integrale in $\mathcal{M}_2$ liegen, wenn der Integrator in $\mathcal{M}_2$ liegt und der Integrand im zugehörigen $\mathcal{L}^*$.

(b) Der Prozess $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ mit $Y_t = \int_0^t e^{W_s^2} dW_s$ ist ein lokales Martingal.
Hinweis: Nutzen Sie, dass stochastische Martingale in $\mathcal{M}$ liegen, wenn der Integrator in $\mathcal{M}$ liegt und der Integrand im zugehörigen $\mathcal{P}^*$.

(c) Der Prozess $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ mit $Z_t = \int_0^t (W_s + s) d(Y_s + s)$ ist ein Semimartingal.

Aufgabe A4 (Anwendung der Ito-Formel, 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(W_t)_{t\geq 0}$ eine stetige Version der Brownsche Bewegung. Zeigen Sie mit Hilfe der eindimensionalen Ito-Formel, dass

$$\int W_s^2 dW_s = \frac{1}{3} W_s^3 - \int W_s ds$$

Für $\lambda > 0$ sei $X_t = e^{\lambda W_t}$. Zeigen Sie, dass

$$\int X_s dW_s = \frac{X_t - 1}{\lambda} - \frac{\lambda}{2} \int_0^t X_s ds.$$

Abgabe bis Donnerstag 16:00 Uhr, 06.07.2023, im Zettelkasten 01 im Mathematikon INF205, 1. Etage.
Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`