Dr. Stefan Richter, Timo Dörzbach
Wahrscheinlichkeitstheorie 2
Sommersemester 2023

Abgabeblatt 1

Aufgabe A1 (Brownsche Bewegung, 4 = 2 + 2 Punkte).
Es sei $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

(a) Für $t \geq 0$ definiere
$$X_t := -W_t.$$
Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Brownschen Bewegung, dass $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ wieder eine Brownsche Bewegung ist.

(b) Sei $a \in [0,\infty)$. Für $t \geq 0$ definiere
$$Y_t := W_{t+a} - W_a$$
Zeigen Sie mit Hilfe der Charakterisierung von Brownschen Bewegungen als Gauß-Prozess, dass $(Y_t)_{t\in[0,\infty)}$ wieder eine Brownsche Bewegung ist.

Aufgabe A2 (Eigenschaften von Brownschen Bewegungen, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).
Sei $(W_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Nehmen Sie an, dass $t \mapsto W_t$ stetig ist (ohne $\mathbb{P}$-f.s.). Definiere

$A := \{\omega \in \Omega :$ Auf allen Intervallen $[a,b]$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ ist $t \mapsto W_t(\omega)$ nicht monoton wachsend$\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $A = A'$ mit

$A' = \{\omega \in \Omega :$ Auf allen Intervallen $[a,b]$ mit $a,b \in \mathbb{Q}$ ist $t \mapsto W_t$ nicht monoton wachsend$\}$

(b) Betrachten Sie für festes $a,b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:
$$M_{a,b,n} := \{\omega \in \Omega : W_a(\omega) \leq W_{a+\frac{b-a}{n}}(\omega) \leq W_{a+2\frac{b-a}{n}}(\omega) \leq ... \leq W_{a+n\frac{b-a}{n}}(\omega) = W_b(\omega)\}.$$
Berechnen Sie $\mathbb{P}(M_{a,b,n})$ und zeigen Sie $\mathbb{P}(M_{a,b,n}) \to 0$ $(n \to \infty)$.

(c) Setzen Sie A' in Beziehung mit $M_{a,b,n}$ und folgern Sie $\mathbb{P}(A) = 1$.

Aufgabe A3 (Die Räume der stetigen Funktionen, 6 = 2 + 4 Punkte).
Für $k > 0$ sei der Raum $C[0,k] = \{f : [0,k] \to \mathbb{R}$ stetig$\}$ ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,k]} |f(x)|$. *Es ist bekannt, dass* $(C[0,k], \|\cdot\|_\infty)$ *vollständig ist.*

- Zeigen Sie, dass $(C[0,k], \|\cdot\|_\infty)$ separabel ist.
  Hinweis: Konstruieren Sie eine abzählbar dichte Teilmenge, zum Beispiel wie folgt: Für $n \in \mathbb{N}$, $q_0, ..., q_n \in \mathbb{Q}$ sei $f_{n,q_0,...,q_n} \in C[0,k]$ die lineare Interpolation der Punkte $(\frac{i}{n}k, q_i)$ für $i = 0, ..., n$. Für beliebiges $f \in C[0,k]$ und $\varepsilon > 0$ nutzen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist und finden Sie $f_{n,q_0,...,q_n}$ mit $\|f - f_{n,q_0,...,q_n}\|_\infty < \varepsilon$.

- Definiere nun auf $C[0,\infty) = \{f : [0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ die Norm

  $$\|f\|_\infty := \sum_{k=1}^{\infty} \min\{2^{-k}, \sup_{x\in[0,k]} |f(x)|\}.$$

  ('gleichmäßige Konvergenz auf Kompakta').
  Zeigen Sie, dass $(C[0,\infty), \|\cdot\|_\infty)$ polnisch ist.

Aufgabe A4 (Schwache Konvergenz, 2 Punkte).

Es sei $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ der Raum der stetigen Funktionen mit der Supremumsnorm. Es seien $f_n, f \in C[0,1]$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig. Es sei

$$\delta_f : \mathcal{B}(C[0,1]) \to [0,1], \quad \delta_f(A) = \begin{cases} 1, & f \in A \\ 0, & f \notin A \end{cases}$$

das Dirac-Maß zu f. Zeigen Sie mit der Definition der schwachen Konvergenz, dass

$$\delta_{f_n} \xrightarrow{D} \delta_f \quad \text{in} \quad (C[0,1], \|\cdot\|_\infty).$$

Abgabe bis Donnerstag 11:00 Uhr, 04.05.2023, im Zettelkasten 01 im Mathematikon INF205, 1. Etage.
Vorlesungswebseite:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt2-ss23/`