Wahrscheinlichkeitstheorie I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Maximilian Siebel
Sommersemester 2022

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Präsenzblatt 9

Aufgabe 17 (Anwendung der Rechenregeln für den bedingten Erwartungswert).
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Es gelte $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$.

(a) Zeigen Sie: $Kov(X, \mathbb{E}[Y|X]) = Kov(X, Y)$.

(b) Es gelte nun $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ und $\mathbb{E}[Y|X] = X$. Zeigen Sie: $X = Y$ $\mathbb{P}$-f.s.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst $\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^2]$ *und betrachten Sie dann* $\mathbb{E}[(X-Y)^2]$.

(c) (i) Seien $X, Y, Z \overset{\text{iid}}{\sim} U[0,1]$. Berechnen Sie

$$\mathbb{E}[4X\sin(Y) + 5Z^2 - 3e^X Y + \sin(XZ)|Y, Z].$$

Hinweis: Nutzen Sie auch A34(c).

(ii) Es gelte $Z - X, X \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[\exp(Z)|X]$.
Hinweis: Nutzen Sie $Z = (Z - X) + X$. *Für* $W \sim N(0, \sigma^2)$ *gilt* $\mathbb{E}\exp(W) = \exp(-\sigma^2/2)$.

(d) Es seien $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. und $M_n := \prod_{i=1}^n X_i$. Ermitteln Sie $\mathbb{E}[M_n|X_1]$ und $\mathbb{E}[M_n|M_{n-1}]$ in Termen von $\mathbb{E}X_1$ und den bedingten Zufallsvariablen.

Aufgabe 18 (Komplexe Bedingte Erwartungswerte).
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen.

(a) Seien X^+, X^- der Positiv- und Negativteil von X. Es gelte $\mathbb{E}|X| < \infty$. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $\mathbb{E}[X^-|X^+] = -\frac{\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{X\le 0\}}]}{\mathbb{P}(X\le 0)}\mathbb{I}_{\{X^+=0\}}$.
Hinweis: Nutzen Sie Prop. 4.11. Zeigen Sie die Gleichheit der Integrale auf dem Erzeugendensystem $\mathcal{E} = (X^+)^{-1}(\{[0,a] : a \ge 0\})$ *von* $\mathcal{F} = (X^+)^{-1}(\mathcal{B}_\mathbb{R})$.

(ii) Ermitteln Sie $\mathbb{E}[X|X^+]$.

(b) Seien X, Y i.i.d. mit Dichte f bzgl. des Lebesguemaßes λ auf $\mathbb{R}$. Es gelte $\mathbb{E}|X| < \infty$. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $\mathbb{E}[X|\max\{X,Y\}] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\min\{X,Y\}|\max\{X,Y\}] + \frac{1}{2}\max\{X,Y\}$.
Hinweis: Nutzen Sie, dass $x + y = \max\{x,y\} + \min\{x,y\}$.

(ii) Seien nun $U = \min\{X,Y\}$, $V = \max\{X,Y\}$. Zeigen Sie, dass (jeweils λ^2- bzw. λ-f.s.):

$$f_{U,V}(u,v) := \frac{d\mathbb{P}^{(U,V)}}{d\lambda^2}(u,v) = 2f(u)f(v)\mathbb{I}_{\{u\le v\}}, \qquad f_V(v) := \frac{d\mathbb{P}^V}{d\lambda}(v) = 2F(v)f(v).$$

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X|V] = \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{X\leq v\}}]|_{v=V}}{2F(V)} + \frac{1}{2}V$.

(iv) Sei nun $X_1 \sim U[0,1]$. Ermitteln Sie $\mathbb{E}[X|\max\{X,Y\}]$.

Abgabe: Keine Abgabe. Dieses Übungsblatt wird (teilweise) in den Übungen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`