Wahrscheinlichkeitstheorie I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Maximilian Siebel
Sommersemester 2022

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Präsenzblatt 8

Aufgabe 15 (Anwendung des starken GGZ).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung.

(a) Sei $X_1 \sim U[1,2]$ (Gleichverteilung auf $[1,2]$). Zeigen Sie, dass

$$\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n} \to c \quad f.s.$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie c.

(b) Sei $X_1 \sim U[0,1]$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \to \int_{[0,1]} f \; \mathrm{d}\lambda \quad f.s.$$

(c) Ermitteln Sie

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{n \text{ Integrale}} f\Big(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\Big) dx_1 \dots dx_n.$$

Hinweis: Schreiben Sie das Integral als Erwartungswert von i.i.d. Zufallsvariablen. Benutzen Sie das starke GGZ und den Satz von der dominierten Konvergenz.

Aufgabe 16 (Kolmogorov-Ungleichung).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ unabhängige (nicht notwendig identisch verteilte) Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_i = 0$ ($i \in \mathbb{N}$). Sei $S_k := \sum_{i=1}^{k} X_i$.
Für $a > 0$ sei

$$A := \{\max_{k=1,\dots,n} |S_k| \geq a\}, \qquad A_k := \{|S_1| < a, \dots, |S_{k-1}| < a, |S_k| \geq a\}.$$

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

(a) $A = \dot{\bigcup}_{k=1,\dots,n} A_k$.

(b) $\mathbb{E}[S_n^2] \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[S_n^2 \mathbb{I}_{A_k}]$.
Hinweis: $S_n^2 \geq S_n^2 \mathbb{I}_A$.

(c) $\mathbb{E}[S_n^2 \mathbb{I}_{A_k}] \geq a^2 \mathbb{P}(A_k)$.
Hinweis: Wenden Sie die binomische Formel auf $S_n^2 = ((S_n - S_k) + S_k)^2$ *an. Schätzen Sie die drei entstehenden Terme separat nach unten ab; einer kann durch* 0 *abgeschätzt werden, bei einem anderen nutzen Sie, dass* $(S_n - S_k)$ *und* $S_k \mathbb{I}_{A_k}$ *unabhängig sind (wieso?)*

(d) Folgern Sie mit (a)-(c) die Kolmogorov-Ungleichung:

$$\mathbb{P}(\max_{k=1,\dots,n} |S_k| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[S_n^2]}{a^2}.$$

Abgabe: Keine Abgabe. Dieses Übungsblatt wird (teilweise) in den Übungen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`