Wahrscheinlichkeitstheorie I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Maximilian Siebel
Sommersemester 2022

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Präsenzblatt 6

Aufgabe 11 (Berechnungen mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei stetig verteilte Zufallsvariablen. Es sei $\mathbb{P}^{(X,Y)} \ll \lambda^2 := \lambda \otimes \lambda$ auf $\mathbb{R}^2$ mit Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = c \cdot xy \cdot \mathbb{I}_{\{0 \le x \le y \le 2\}} = \begin{cases} c \cdot xy, & 0 \le x \le y \le 2, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) Bestimmen Sie $c > 0$, so dass $f_{X,Y}$ tatsächlich eine Dichte von $\mathbb{P}^{(X,Y)}$ ist.

(b) Berechnen Sie die Randdichten f_X und f_Y von X bzw. Y (jeweils bzgl. λ auf $\mathbb{R}$).

(c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(2X \ge Y)$.

(d) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X \cdot Y]$.

(e) Sind X, Y stochastisch unabhängig?

Aufgabe 12 (Multiplikative Faltung).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen $F_X(x) := \mathbb{P}(X \le x)$, $F_Y(y) := \mathbb{P}(Y \le y)$. Es gelte $Y > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $X \cdot Y$ die folgende Verteilungsfunktion besitzt:

$$F_{X \cdot Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} F_X(\frac{z}{y}) \, \mathrm{d}F_Y(y).$$

Es sei $\mathbb{P}^X \ll \lambda$ (λ das Lebesguemaß) mit Dichte f_X auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe maßtheoretischer Induktion, dass für jede nichtnegative messbare numerische Funktion $h : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\ge 0}$ gilt:

$$\forall y > 0 : \quad \int h(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) = \int \frac{1}{y} h(\frac{x}{y}) \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis, dass $\lambda(yB) = y\lambda(B)$ für $y > 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^{X \cdot Y} \ll \lambda$ mit Dichte

$$f_{X \cdot Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y} f_X(\frac{z}{y}) \, \mathrm{d}F_Y(y).$$

Abgabe: Keine Abgabe. Dieses Übungsblatt wird (teilweise) in den Übungen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`