Wahrscheinlichkeitstheorie I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Maximilian Siebel
Sommersemester 2022

UNIVERSITÄT HEIDELBERG ZUKUNFT SEIT 1386

Präsenzblatt 5

Aufgabe 9 (Beispiele für Dichten und Absolutstetigkeit).
Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. Seien $a_1, a_2 \in (0, \infty)$. Für $i = 1, 2$ seien $\mathbb{P}_i = U[0, a_i]$ die Gleichverteilungen mit Dichten

$$f_i(x) = \frac{1}{a_i}\mathbb{I}_{[0,a_i]}(x)$$

bzgl. des Lebesgue-Maßes λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$.

(i) Unter welchen Bedingungen gilt $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$?

(ii) Geben Sie im Falle von $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$ zwei verschiedene Dichten $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}$ an, die aber $\mathbb{P}_2$-f.s. gleich sind.

(b) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$. Es seien $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \infty)$. Für $i = 1, 2$ seien $\mathbb{P}_i = \mathrm{Poi}(\lambda_i)$ Poissonverteilungen mit Dichten

$$f_i(x) = \frac{\lambda_i^x}{x!}e^{-\lambda_i}$$

bzgl. des Zählmaßes μ_Z auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

(i) Unter welchen Bedingungen gilt $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$?

(ii) Geben Sie im Falle von $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_2$ eine Dichte $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}$ an.

Aufgabe 10 (σ-endliche Maße besitzen äquivalentes endliches Maß).
Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass ein zu μ äquivalentes *endliches* Maß ν auf $(\Omega, \mathcal{A})$ existiert (hierbei heißen zwei Maße μ, ν äquivalent, wenn $\nu \ll \mu$ und $\mu \ll \nu$ gilt).
Sei $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω mit $\mu(E_n) < \infty$ für $n \in \mathbb{N}$, und definiere

$$\nu(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \cdot \frac{\mu(E_n \cap A)}{\mu(E_n) + 1}.$$

(a) Zeigen Sie, dass ν ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\nu \ll \mu$ und $\mu \ll \nu$.

(c) Ermitteln Sie $\frac{d\nu}{d\mu}$ und $\frac{d\mu}{d\nu}$.

Abgabe: Keine Abgabe. Dieses Übungsblatt wird (teilweise) in den Übungen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`