Wahrscheinlichkeitstheorie I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Maximilian Siebel
Sommersemester 2022

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Präsenzblatt 4

Aufgabe 7 (Regeln für Maßintegrale).
Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf diesem Raum, sowie $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, \infty]$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Dann ist

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad \mu(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \cdot \mu_n(A)$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ (Überlegen Sie sich, warum dies der Fall ist!).

(a) Zeigen Sie mittels maßtheoretischer Induktion, dass für eine messbare numerische Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \cdot \int f \, \mathrm{d}\mu_n,$$

falls alle Ausdrücke auf der rechten Seite existieren und wohldefiniert sind.

(b) Es sei $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar numerisch mit $X \geq 0$ f.s. Zeigen Sie:

$$\int X \, \mathrm{d}\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0 \quad f.s.$$

Aufgabe 8 (Stetigkeit von Parameterintegralen).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen. Die Abbildung $f : U \times \Omega \to \mathbb{R}$ erfülle

(1) Für jedes $x \in U$ ist $f(x, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ μ-integrierbar.

(2) Für μ-fast alle $\omega \in \Omega$ ist $f(\cdot, \omega) : U \to \mathbb{R}$ stetig, und es gibt eine μ-integrierbare Abbildung $g : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass $|f(x, \omega)| \leq g(\omega)$ für alle $x \in U, \omega \in \Omega$.

Zeigen Sie: für jedes $x_0 \in U$ ist $x \mapsto \int f(x, \omega) \, \mathrm{d}\mu(\omega)$ in x_0 stetig.
Hinweis: Nutzen Sie den Satz von der dominierten Konvergenz.

Abgabe: Keine Abgabe. Dieses Übungsblatt wird (teilweise) in den Übungen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`