Wahrscheinlichkeitstheorie I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Maximilian Siebel
Sommersemester 2022

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Präsenzblatt 3

Aufgabe 5 (Nachweis von Messbarkeitsregeln).

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $X, X_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$ messbare numerische Funktionen.

(a) Zeigen Sie: $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ ist eine messbare numerische Funktion.
Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis, dass $\mathcal{E} = \{[-\infty, a] : a \in \overline{\mathbb{R}}\}$ erfüllt: $A(\mathcal{E}) = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

(b) Sei
$$\tau : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \tau(\omega) := \sup\{i \in \mathbb{N} : X_i(\omega) > 0\}, \qquad \sup \emptyset := 0.$$
der letzte Zeitpunkt, bei welchem X_i positiv ist. Zeigen Sie, dass τ eine messbare numerische Funktion ist.
Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis, dass $\mathcal{E}_2 = \{[a, \infty] : a \in \overline{\mathbb{R}}\}$ erfüllt: $A(\mathcal{E}_2) = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

(c) Für alle $c \in \overline{\mathbb{R}}$ gelte $X^{-1}(\{c\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = c\} \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass X keine messbare numerische Funktion sein muss.
Hinweis: Sie dürfen ohne weitere Konstruktion annehmen, dass es eine Menge $C \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\backslash\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$ gibt.

Aufgabe 6 (Messbarkeit kombinierter Abbildungen).

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f, X, Y : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare numerische Funktionen, $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(a) $Z := (X, Y) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^2$ ist eine 2-dimensionale messbare numerische Funktion.
Hinweis: $\mathcal{E} = \{[-\infty, a_1] \times [-\infty, a_2] : a_1, a_2 \in \overline{\mathbb{R}}\}$ erfüllt $A(\mathcal{E}) = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^2}$.

(b) Die Abbildung
$$Z : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, \quad Z(\omega) := \begin{cases} X(\omega), & \omega \in A, \\ Y(\omega), & \omega \in A^c \end{cases}$$
ist eine messbare numerische Funktion.

(c) Für $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ ist
$$f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}, \quad f(x) := \begin{cases} x, & x > 0, \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$
eine messbare numerische Funktion.

Abgabe: Keine Abgabe. Dieses Übungsblatt wird (teilweise) in den Übungen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`