



Präsenzblatt 2

Aufgabe 3 (Translationsinvarianz des Lebesguemaßes).

Sei bezeichne λ das Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Zeigen Sie: λ ist translationsinvariant, d.h. für alle $c \in \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ gilt:

$$\lambda(B) = \lambda(B + c), \quad B + c := \{b + c : b \in B\}.$$

Aufgabe 4 (Diskussionen zum Maßfortsetzungssatzes - Eindeutigkeit).

Sei $\Omega \neq \emptyset$ und \mathcal{A} eine σ -Algebra über Ω .

- (a) Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein \cap -stabiles Erzeugendensystem von \mathcal{A} . Seien μ, ν endliche Maße auf (Ω, \mathcal{A}) . Es gelte $\mu \leq \nu$ auf \mathcal{E} . Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass nicht $\mu \leq \nu$ auf \mathcal{A} folgen muss.
- (b) Sei nun $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und $\mathcal{E} = \{\{k, k + 1\} : k \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie $\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Finden Sie zwei σ -endliche Maße μ_1, μ_2 auf (Ω, \mathcal{A}) mit $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$, aber $\mu_1 \neq \mu_2$. Welche Voraussetzung von 1.21(a),(b) ist verletzt?

Abgabe: Keine Abgabe. Dieses Übungsblatt wird (teilweise) in den Übungen besprochen.

Homepage der Vorlesung:

<https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html>