Wahrscheinlichkeitstheorie I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Maximilian Siebel
Sommersemester 2022

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Präsenzblatt 12

Aufgabe 23 (Charakteristische Funktionen).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $X \sim \text{Bin}(n,p)$ mit $p \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$.

(i) Berechnen Sie $\phi_{\text{Bin}(1,p)}$.

(ii) Ermitteln Sie ϕ_X.
Hinweis: Nutzen Sie die Faltungseigenschaft der Binomialverteilung: Falls $X_1, ..., X_n \sim Bin(1,p)$ i.i.d., so ist $\sum_{k=1}^n X_k \sim Bin(n,p)$.

(iii) Ermitteln Sie mit der Momentenformel $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{E}[X^2]$.

Aufgabe 24 (Anwendung des Stetigkeitssatzes).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen. Zur Lösung der Aufgaben sollen Sie den Stetigkeitssatz für charakteristische Funktionen nutzen.

(a) Seien $Y_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$ Binomialverteilt mit Parametern $p_n \in (0,1)$. Es gelte $\lim_{n\to\infty} np_n \to c \in (0,\infty)$. Zeigen Sie, dass Y_n schwach konvergiert und bestimmen Sie den Limes.
Hinweis: Für Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ mit $x_n \to x \in \mathbb{C}$ gilt $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x_n}{n})^n = e^x$.

(b) Seien $Y_n \sim U[0, a_n]$ gleichverteilt auf $[0, a_n]$, wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen ist.

  (i) Es gelte $a_n \to a$. Zeigen Sie: $Y_n \xrightarrow{D} U[0,a]$.

  (ii) Es gelte $a_n \to \infty$. Zeigen Sie mittels der Definition: $\{\mathbb{P}^{Y_n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht straff. Folgern Sie: Y_n konvergiert nicht in Verteilung.

Abgabe: Keine Abgabe. Dieses Übungsblatt wird (teilweise) in den Übungen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`