



Präsenzblatt 11

Aufgabe 21 (Ein nicht gleichgeradig integrierbares Martingal).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $U_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(U_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(U_n = 0)$. Sei $\tau := \inf\{n \geq 1 : U_n = 1\}$. Definiere $X_n := (1 - p)^{-n} \mathbb{I}_{\{\tau > n\}}$. Zeigen Sie:

- (a) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\mathcal{F}_n := \sigma(U_k : k \leq n)$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\tau \sim \text{Geo}(p)$.
- (b) $X_n \rightarrow 0$ f.s.
Hinweis: Nutzen Sie den Martingalkonvergenzsatz 5.22.
- (c) X_n konvergiert nicht im 1.-ten Mittel.
- (d) $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht gleichgradig integrierbar.

Aufgabe 22 (Doob-Ungleichung und Martingalkonvergenzsatz).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $Y_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ Zufallsvariablen. Definiere $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_k : k \leq n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

- (a) Sei $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \mathbb{E}Y_n = 0, \mathbb{E}[Y_n^2] < \infty$. Zeigen Sie:

$$\forall x > 0 : \quad \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} Y_k > x \right) \leq \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{x^2}$$

Hinweis: Wenden Sie die Funktion $\phi(x) = x^2$ auf beiden Seiten der Ungleichung in $\mathbb{P}(\cdot)$ an. Nutzen Sie dann A37(b) (warum wird die Voraussetzung ϕ monoton wachsend nicht benötigt?) und die Doob-Ungleichung.

- (b) Es sei nun $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ i.i.d. und es gelte $\mathbb{P}(Y_0 = 0) = \mathbb{P}(Y_0 = 1) = \frac{1}{2}$. Definiere $X_n := -2^n Y_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$).
Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist und dass keine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $\mathbb{E}|X| < \infty$ und $X_n \rightarrow X$ \mathbb{P} -f.s. Welche Voraussetzung des Martingalkonvergenzsatzes 5.23 ist verletzt?

Abgabe: Keine Abgabe. Dieses Übungsblatt wird (teilweise) in den Übungen besprochen.

Homepage der Vorlesung:

<https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html>