UNIVERSITÄT HEIDELBERG ZUKUNFT SEIT 1386

Präsenzblatt 10

Aufgabe 19 (Symmetrischer Random Walk).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\varepsilon_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ eine i.i.d. Folge von Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = \frac{1}{2}$. Definiere für $n \in \mathbb{N}_0$

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k, \quad S_0 := 0,$$

$\mathcal{F}_n := \sigma(\varepsilon_k : k \leq n)$ und $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \in \{2, -3\}\}$. Zeigen Sie:

(a) τ ist eine $(\mathcal{F}_n)$-Stoppzeit.

(b) Es gilt $\mathbb{E}\tau < \infty$.
Hinweis: Definieren Sie Blöcke $B_n := (\varepsilon_{5n-4}, ..., \varepsilon_{5n})$ und $\theta := \inf\{n \in \mathbb{N} : B_n = (1, 1, 1, 1, 1)\}$ und folgern Sie $\tau \leq 5\theta$. Was ist die Verteilung von θ?

(c) Es ist $\mathbb{P}(S_\tau = 2) = \frac{3}{5}$.
Hinweis: Wenden Sie das Optional Sampling Theorem auf das Martingal S_n an. Nutzen Sie, dass S_τ nur zwei verschiedene Werte annehmen kann.

(d) Berechnen Sie $\mathbb{E}\tau$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $(S_n^2 - n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal ist und wenden Sie das Optional Sampling Theorem darauf an.

Aufgabe 20 (Symmetrischer Random Walk, einseitige Begrenzung).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\varepsilon_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Sei $S_n := \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$ und $S_0 := 0$. Für $b \in \mathbb{N}$ definiere

$$\tau_b := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n = b\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für jedes $\sigma > 0$ ist die Folge $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definiert durch $M_n := \frac{e^{\sigma S_n}}{\cosh(\sigma)^n}$ ein Martingal bzgl. einer geeigneten Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Hierbei ist $\cosh(\sigma) := \frac{1}{2}(e^{\sigma} + e^{-\sigma})$.

(b) $\mathbb{P}(\tau_b < \infty) = 1$.
Hinweis: Nutzen und begründen Sie die folgende Gleichung für $m \in \mathbb{N}$:

$$1 = \lim_{m \to \infty} \mathbb{E}[M_{m \wedge \tau_b}] = \mathbb{E}[\lim_{m \to \infty} M_{m \wedge \tau_b}] = \mathbb{E}[\lim_{m \to \infty} M_{m \wedge \tau_b} \mathbb{I}_{\{\tau_b < \infty\}}] + \mathbb{E}[\lim_{m \to \infty} M_{m \wedge \tau_b} \mathbb{I}_{\{\tau_b = \infty\}}]$$

Vereinfachen Sie die rechte Seite und wenden Sie $\sigma \downarrow 0$ an.

(c) Es gilt $\mathbb{E}\tau_b = \infty$.
Hinweis: Verwenden Sie die Kontraposition des Optional Sampling Theorems.

Abgabe: Keine Abgabe. Dieses Übungsblatt wird (teilweise) in den Übungen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`