Wahrscheinlichkeitstheorie I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Maximilian Siebel
Sommersemester 2022

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Präsenzblatt 1

Aufgabe 1 (Borelsche σ-Algebra).

Sei $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ die Borelsche σ-Algebra über $\mathbb{R}$, d.h. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} := A(\mathcal{E}_B)$ mit $\mathcal{E}_B := \{U \subset \mathbb{R} : U \text{ offen}\}$. Aus Übungsblatt 1, A3 ist außerdem bekannt, dass

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = A(\mathcal{E}), \qquad \mathcal{E} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass gilt: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = A(\mathcal{E}_i)$, $i = 1, 2, 3$, wobei

- $\mathcal{E}_1 = \{[a,b] : a, b \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{E}_2 = \{[a,b] : a, b \in \mathbb{Q}\}$,
- $\mathcal{E}_3 = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ ist kompakt}\}$.

Hinweis: Nutzen Sie folgende Regel für Mengensysteme $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega)$: Gilt $\mathcal{E} \subset A(\mathcal{E}')$, so folgt bereits $A(\mathcal{E}) \subset A(\mathcal{E}')$.

Aufgabe 2 (Beweise mit σ-Algebren).

Sei Ω eine nichtleere Menge, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathcal{A} = A(\mathcal{E})$.

(a) Sei $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ die Borelsche σ-Algebra über $\mathbb{R}$. Sei $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Definiere

$$c \cdot \mathcal{B}_{\mathbb{R}} := \{c \cdot B : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}, \quad \text{wobei} \quad c \cdot B := \{c \cdot b : b \in B\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = c \cdot \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
Hinweise: Nutzen Sie die Darstellung $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = A(\mathcal{E})$ mit $\mathcal{E} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

- *'$\subset$': Zeigen Sie: 1) $\mathcal{E} \subset c \cdot \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ und 2) $c \cdot \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ist eine σ-Algebra über $\mathbb{R}$.*
- *'$\supset$': Definieren Sie $\mathcal{C} := \{B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : c \cdot B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$. Zeigen Sie 1) $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ und 2) $\mathcal{C}$ ist σ-Algebra über $\mathbb{R}$.*

(b) Zeigen Sie: Gilt $A(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$, so existiert für beliebige $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega$ mit $\omega \neq \tilde{\omega}$ ein $E \in \mathcal{E}$ mit $\mathbb{I}_E(\omega) \neq \mathbb{I}_E(\tilde{\omega})$.
Hinweis: Nutzen Sie einen Beweis durch Widerspruch. Definieren Sie für $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega$ mit $\omega \neq \tilde{\omega}$ das Mengensystem $\mathcal{B} := \{A \in A(\mathcal{E}) : \omega, \tilde{\omega} \in A \text{ oder } \omega, \tilde{\omega} \in A^c\}$. Zeigen Sie dann: 1) $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$, 2) $\mathcal{B}$ ist eine σ-Algebra. Folgern Sie $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ und finden Sie den Widerspruch.

Abgabe: Keine Abgabe. Dieses Übungsblatt wird (teilweise) in den Übungen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`