Wahrscheinlichkeitstheorie I
Prof. Dr. Rainer Dahlhaus
Maximilian Siebel
Sommersemester 2022

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

9. Abgabeblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Summe Σ

Namen:

Tutor:

Aufgabe 33 (Bedingte Erwartungswerte I, 3 = 1 + 1 + 1).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsvariablen, die gemeinsam stetig verteilt seien mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \mathbb{I}_{\{0 \le x \le y\}} \cdot \exp(-y) = \begin{cases} \exp(-y), & 0 \le x \le y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

bzgl. λ^2 auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$. Bestimmen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) die bedingten Dichten $f_{X|Y=y}(x)$ und $f_{Y|X=y}(x)$,

(b) die bedingten Erwartungswerte $\mathbb{E}[X|Y=y]$ und $\mathbb{E}[Y|X=x]$,

(c) $\mathbb{E}[X|Y]$ und $\mathbb{E}[Y|X]$.

Aufgabe 34 (Bedingte Erwartungswerte II, 5 = 1 + 1 + 1 + 1 +1).
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Zeigen Sie (alle Aussagen sind wie üblich bei bedingten Erwartungswerten $\mathbb{P}$-f.s. zu verstehen):

(a) Triviale bedingte Erwartungswerte: $\mathbb{E}[1|\mathcal{F}] = 1$ und $\mathbb{E}[X|\{\emptyset, \Omega\}] = \mathbb{E}X$.

(b) Messbarkeitsregel: X $\mathcal{F}$-messbar $\Rightarrow \mathbb{E}[XY|\mathcal{F}] = X \cdot \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$.

(c) Linearität des bed. Erwartungswerts: Für $a \in \mathbb{R}$ gilt: $\mathbb{E}[aX + Y|\mathcal{F}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] + \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$.

(d) Monotonie des bed. Erwartungswerts: $X \ge 0$ f.s. $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \ge 0$.

Seien nun $(\mathcal{X}_i, \mathcal{B}_i)$ Messräume und $X_i : \Omega \to \mathcal{X}_i$ $(i = 1, 2)$ unabhängige messbare Abbildungen. Sei $g : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ messbar.

(e) Es gelte $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[|g(X_1, y)|\big]\big|_{y=X_2}\big] < \infty$. Zeigen Sie $\mathbb{E}|g(X_1, X_2)| < \infty$ und

$$\mathbb{E}[g(X_1, X_2)|X_2] = \mathbb{E}[g(X_1, y)]\big|_{y=X_2}.$$

Aufgabe 35 (Bedingte Erwartungswerte III, 4 = 1 + 1 + 2).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Weiter sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine weitere σ-Algebra über Ω.

(a) Projektionseigeschaft des bedingten Erwartungswerts: Sei $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$. Sei weiter Y $\mathcal{F}$-messbar. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}[(X-Y)^2] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2] + \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2].$$

(b) (i) Seien $X, Y, Z \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[(X-Z)^2 - XYZ + e^{XZ}|X, Y]$.

(ii) Es gelte $Z - X, X \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[Z^2|X]$.

(c) Es seien nun $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ und $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Ermitteln Sie die folgenden Ausdrücke in Termen von $\mathbb{E}X_1$ und den bedingten Zufallsvariablen.

(i) $\mathbb{E}[S_n|X_1]$ und $\mathbb{E}[S_n|S_{n-1}]$,

(ii) $\mathbb{E}[X_1|S_n]$ und $\mathbb{E}[S_{n-1}|S_n]$.

Aufgabe 36 (Bedingte Erwartungswerte IV, 4 = 2 + 2).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable.

(a) Sei $X \geq 0$ und $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Definiere $Y := \min\{X, t\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X|Y] = \begin{cases} Y, & Y < t, \\ \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{\{X \geq t\}}]}{\mathbb{P}(X \geq t)}, & Y = t \end{cases}.$$

(b) X sei stetig bzgl. des Lebesgue-Maßes λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ mit Dichte f. Sei $Z := X^2$. Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{E}[X|Z] = \sqrt{Z}\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X>0\}}|Z] - \sqrt{Z}\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X<0\}}|Z]$.

(ii) Es gilt λ-f.s.

$$f_Z(z) := \frac{d\mathbb{P}^Z}{d\lambda}(z) = \frac{f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})}{2\sqrt{z}}.$$

(iii) $\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X>0\}}|Z] = \frac{f(\sqrt{Z})}{f(\sqrt{Z}) + f(-\sqrt{Z})}$.

(iv) Geben Sie $\mathbb{E}[X|Z]$ an.

Abgabe: In Zweiergruppen, bis spätestens Freitag, den 24. Juni 2022, 9:00 Uhr per Moodle.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/wt1-ss22/index.html`